INSTITUTO
DE FÍSICA

preprint

IFUSP/P-197

QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA E MODELOS
COSMOLÓGICOS

H. Fleming
Instituto de Física
Universidade de São Paulo

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA
Caixa Postal - 20.516
Cidade Universitária
São Paulo - BRASIL

QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA E MODELOS COSMOLÓGICOS

H.FLEMING - INSTITUTO DE FÍSICA DA USP

1. Introdução

A combinação de altas temperaturas e pressões prevista pelo modelo standard[1] da Cosmologia para os primeiros instantes do Universo faz com que as interações entre partículas elementares venham a ter um papel importante em sua evolução. A alta temperatura revela uma energia térmica que compete com as energias de ligação atômicas e nucleares, e a alta pressão revela uma concentração suficiente para tornar importantes as interações de alcance muito curto, e as desfavorecidas, em condições normais, pelo espaço de fase[2]. Estas interações, produções e recombinações de partículas, são hoje descritas por teorias de campo com uma invariancia de padrão (gauge), que passam então a ter um papel de relevo na cosmologia. É preciso mencionar também que há tentativas de reformular a própria teoria da gravitação de Einstein como uma teoria de padrão[3], o que reduziria todo o problema cosmológico a um estudo dessas teorias. Muitas delas, como a de Weinberg - Salam[4] e a alternativa de Zee à teoria de Einstein[5] fazem uso essencial do conceito de quebra espontânea de simetria[6], e se faz então necessário investigar o efeito da alta temperatura, e outros fatores externos de grande intensidade, sobre a quebra espontânea de uma determinada simetria. Os passos fundamentais para a resolução deste problema foram dados por Keizhnits[7] e Keizhnits-Linde[8], e tratados depois em detalhe por vários autores[9], que confirmaram as conjecturas dos dois pioneiros, de que existe uma temperatura crítica acima da qual as simetrias espontaneamente quebradas de uma teoria de padrão passam novamente a ser exatas. Isto acarreta o aparecimento de partículas de massa zero na teoria, e as interações passam a ser de longo alcance, com consequências de grande importân cia para a evolução do Universo.

Nestas notas estaremos discutindo esses problemas de uma forma o quanto possível elementar, apropriada para pessoas não muito familiarizadas com a teoria quântica dos campos. A bibliografia procurará estender o interesse das notas aos mais experimentados.

2. O Conceito de Quebra Espontânea de Simetria

Considere um sistema formado por infinitas agulhas imantadas dispostas regularmente num plano e capazes de girar livremente em torno de seus pontos médios. Na presença de um campo magnético externo uniforme, todas se orientarão na direção do campo, qualquer que seja esta direção. Desliguemos o campo magnético: as agulhas permanecem orientadas nessa direção, se as vibrações térmicas não forem muito violentas. O estado em que as agulhas estão dispostas paralelamente é o estado de menor energia do sistema: é o estado fundamental. Na ausência de qualquer campo magnético externo, há infinitos estados fundamentais, cada um deles correspondendo a uma direção, à qual todos os magnetos estão colocados paralelamente. Todos têm a mesma energia, todos são estados fundamentais. Uma pessoa que habite esta floresta de magnetos não imaginará que o seu mundo seja isotrópico: a direção onipresente dos magnetos parece ser privilegiada. No entanto, a interação que descreve magnetos com este comportamento é invariante por rotações, e, portanto, isotrópica. Isto se reflete no fato de que a direção dos magnetos é esta, mas poderia ser qualquer outra. Como o observador, suposto pequeno, não pode alterar a orientação de um número infinito de magnetos, as outras direções não lhe parecem ser naturais. A isotropia do sistema é uma simetria escondida[10].

Quando o sistema de magnetos está fora do estado fun damental, tem à sua disposição um número infinito de estados de mínima energia. No momento em que "escolhe" um deles, a simetria é quebrada. Não havendo nenhum agente externo, a quebra é dita "espontânea". Deve-se então, em essência, ao fato de que o estado fundamental é degenerado, nenhum deles sendo invariante por rotações, uma vez que é caracterizado por uma direção.

Diz-se, em geral, que uma teoria apresenta uma quebra espontânea de simetria quando sua Lagrangeana possui uma simetria que não é compartilhada pelo vácuo (estado de mínima energia).

No exemplo acima, suponhamos que o sistema de magnetos seja colocado a uma temperatura elevada. A agitação térmica impedirá a orientação dos magnetos: o estado em que estão todos orientados não pode mais existir, e a isotropia reaparece. A simetria é restaurada.

No que se segue utilizaremos as idéias introduzidas neste parágrafo no contexto das teorias quânticas de campo, onde são ricas de consequências.

3. Quebra Espontânea de Simetria em Teorias de Campo

Para começar com um caso bem simples, vamos estudar o campo escalar cuja evolução é descrita pela densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \, \partial_\mu \varphi + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \tag{1}$$

onde o termo de massa $\frac{1}{2}\mu^2\phi^2$ está com o sinal "errado". A densidade de energia (densidade hamiltoniana) é

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + U(\varphi) \tag{2}$$

onde

$$U(\varphi) \doteq \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 \qquad (3)$$

É claro que o campo de menor energia é um campo constante que minimiza $U(\phi)$. As equações

$$\frac{dU}{d\varphi} = \varphi\left(\frac{\lambda}{3!}\varphi^2 - \mu^2\right) = 0 \qquad (4)$$

e

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = \frac{\lambda}{2}\varphi^2 - \mu^2 \qquad (5)$$

mostram que o campo $\phi=0$ não é um mínimo, sendo este atingido para

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{6}{\lambda}}\,\mu\,, \qquad (6)$$

que corresponde, então, ao estado fundamental do campo, ou, considerado como campo quântico, ao valor esperado do operador de campo no estado fundamental, ou ainda, ao valor esperado no vácuo.

A lagrangeana (1) é invariante pela transformação $\phi\to-\phi$. Estamos vendo aqui que o valor esperado no vácuo de campo possui dois valores diferentes, ligados pela transformação $\phi\to-\phi$. Em outras palavras, há dois vácuos, e a eles correspondem valores esperados distintos de ϕ. Quando o sistema físico "escolhe" um dos vácuos, a simetria $\phi\to-\phi$ é quebrada espontaneamente. Vejamos como isto se dá. Escrevendo a equação (6) como

$$\langle 0|\varphi(x)|0\rangle = \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\,\mu \qquad (7)$$

ou seja, escolhendo um dos vácuos, vê-se que o estado $\phi(x)/0>$ não é ortogonal ao vácuo. Isto mostra que o campo $\phi(x)$ não possui uma interpretação simples em termos de partículas, pois, neste caso, o estado $\phi(x)/0>$ teria um número de partículas não nulo,e deveria ser ortogonal ao vácuo. Vamos por isso passar a um campo $\phi'(x)$, definido por

$$\varphi'(x) = \varphi(x) - \langle 0|\varphi(x)|0\rangle = \varphi(x) - \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\,\mu \tag{8}$$

Agora

$$\langle 0|\varphi'(x)|0\rangle = 0 \ .$$

Reescrevendo (1) em termos de ϕ', temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^{\mu}\varphi'\partial_{\mu}\varphi' - \frac{1}{2}(2\mu^2)\varphi'^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\,\mu\varphi'^3 - \frac{\lambda}{4!}\varphi'^4 \tag{9}$$

que tem agora um aspecto mais usual: o termo de massa está com o sinal "correto" (a partícula descrita por ϕ' tem massa $\sqrt{2}\mu$) e o valor esperado no vácuo de ϕ' é nulo. Em contraposição, a lagrangeana não apresenta mais, explicitamente, a simetria $\phi\leftrightarrow-\phi$. Ela está escondida. Um observador que estudasse a física dessas partículas de spin zero, atribuiria a elas a lagrangeana (9). Talvez viesse depois a descobrir que (1) é outra descrição equivalente, e que a simetria $\phi\leftrightarrow-\phi$ é básica à teoria.

A situação é mais dramática quando a simetria espontaneamente quebrada é contínua: há aí consequências sobre o espectro das partículas.

4. O Teorema de Goldstone[11]

Apresentamos aqui o tratamento de Coleman (Ref.10). Considere a lagrangeana que descreve a interação entre dois campos, ϕ_1 e ϕ_2, ambos reais:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi_1\,\partial_\mu\varphi_1 + \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi_2\,\partial_\mu\varphi_2 - U(\varphi_1,\varphi_2) \tag{10}$$

onde

$$U(\varphi_1,\varphi_2) = \frac{\lambda}{4!}\left[\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - a^2\right]^2 \tag{11}$$

Note-se que os termos quadráticos da lagrangeana serão $\frac{\lambda}{12}a^2\phi_1^2$ e $\frac{\lambda}{12}a^2\phi_2^2$, que serão termos de massa com o sinal "errado".

A teoria é simétrica pelas transformações

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\to \varphi_1 \cos\omega + \varphi_2 \operatorname{sen}\omega \\ \varphi_2 &\to -\varphi_1 \operatorname{sen}\omega + \varphi_2 \cos\omega \end{aligned} \tag{12}$$

Existem infinitos vácuos, uma vez que $U(\phi_1, \phi_2)$ atinge seu menor valor para quaisquer campos que satisfaçam

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = a^2 \tag{13}$$

Todos são equivalentes. Escolhendo

$$\begin{aligned} \langle 0|\varphi_1(x)|0\rangle &= a \\ \langle 0|\varphi_2(x)|0\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

e redefinindo os campos pelas equações

$$\varphi_i'(x) = \varphi_i(x) - \langle 0|\varphi_i(x)|0\rangle \tag{15}$$

tem-se

$$U(\varphi_1', \varphi_2') = \frac{\lambda}{4!}\left[\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 + 2a\,\varphi_1'\right]^2 \tag{16}$$

sendo visível a ausência de um termo de massa para o campo ϕ_2' (o campo ϕ_1' tem a massa $a\sqrt{\frac{\lambda}{3}}$). O boson de massa zero ϕ_2' é o boson de Goldstone, e o resultado geral diz que a quebra espontânea de uma simetria contínua implica na existência de um boson de massa zero. Veremos a seguir que as teorias de padrão escapam ao regime de validade deste poderoso teorema.

5. O Mecanismo de Higgs[12]

Exemplificaremos com a Eletrodinâmica, que é uma teoria de padrão abeliana. Seja $\vec{\phi}$ um conjunto de campos cuja dinâmica é descrita pela lagrangeana $\mathcal{L}(\vec{\phi}, \partial_\mu\vec{\phi})$, que supomos invariante pelas transformações

$$\vec{\varphi} \rightarrow e^{i\bar{Q}\omega}\,\vec{\varphi} \tag{17}$$

onde $\bar{Q}$ é uma matriz hermiteana e ω o parâmetro da transformação, suposto constante. As transformações infinitesimais são

$$\delta\vec{\varphi} = i\,\bar{Q}\,\vec{\varphi}\,\delta\omega \tag{18}$$

ou, em termos de componentes,

$$\delta\varphi_a = i\,Q_{ab}\,\varphi_b\,\delta\omega\,. \tag{19}$$

Queremos agora generalizar a teoria para que admita como simetrias as transformações (19) mas com $\delta\omega$ sendo uma função do ponto, $\delta\omega(x)$. A lagrangeana $\mathcal{L}(\vec{\phi}, \partial_\mu \vec{\phi})$ não é invariante sob essas novas transformações, pois os termos $\partial_\mu \vec{\phi}$ se transformam segundo a equação

$$\delta(\partial_\mu \vec{\varphi}) = i\, \bar{Q}\, (\partial_\mu \vec{\varphi})\, \delta\omega + i\, \bar{Q}\, \vec{\varphi}\, \partial_\mu(\delta\omega) . \tag{20}$$

Se a lagrangeana é invariante por (19) (com $\delta\omega$ constante), então é invariante pela transformação (20) com $\delta\omega$ constante, isto é, sem o segundo termo do segundo membro. É a presença deste termo que estraga a invariancia. Para resolver este problema, procede-se assim[13]: introduz-se um novo campo, A_μ , chamado de campo de padrão (gauge field), que se transforma segundo

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{e}\, \partial_\mu(\delta\omega) \tag{21}$$

onde e é um novo parâmetro, chamado de carga elétrica. Introduzo a operação de derivada covariante de padrão

$$D_\mu \vec{\varphi} = \partial_\mu \vec{\varphi} + i e\, \bar{Q}\, A_\mu\, \vec{\varphi} \tag{22}$$

que se transforma segundo

$$\delta(D_\mu \vec{\varphi}) = i\, \bar{Q}\, (D_\mu \vec{\varphi})\, \delta\omega . \tag{23}$$

A lagrangeana

$$\mathcal{L}(\vec{\varphi}, D_\mu \vec{\varphi}) \tag{24}$$

é invariante pelas transformações (19) e (20), que são chamadas transformações de padrão (de gauge). Basta agora introduzir os termos de energia cinética dos campos A_μ. A maneira mais simples é através de um termo proporcional a $(F_{\mu\nu})^2$, onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \tag{25}$$

Então, a lagrangeana invariante pela generalização das transformações (18) para as transformações de padrão (19) e (20) é obtida de $\mathcal{L}(\vec{\phi}, \partial_\mu\vec{\phi})$ assim:

$$\mathcal{L}(\vec{\varphi}, \partial_\mu\vec{\varphi}) \longrightarrow -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \mathcal{L}(\vec{\varphi}, D_\mu\vec{\varphi}) . \tag{26}$$

É claro que a lagrangeana do segundo membro de (26) é a lagrangeana usual da eletrodinâmica, e as transformações de padrão (21) correspondem à indefinição bem conhecida dos potenciais. Vejamos agora o que acontece se a simetria for espontaneamente quebrada. Sejam ϕ_1 e ϕ_2 as componentes de $\vec{\phi}$, e introduzamos as "variáveis angulares" ρ e θ através de

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \rho \cos\theta \\ \varphi_2 &= \rho \,\mathrm{sen}\,\theta . \end{aligned} \tag{27}$$

Examinemos a lagrangeana dada pelas equações (10) e (11). Em variáveis angulares a simetria é

$$\begin{aligned} \rho &\to \rho \\ \theta &\to \theta + \omega \end{aligned} \tag{28}$$

e a lagrangeana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 + \frac{1}{2}\rho^2(\partial_\mu\theta)^2 - U(\rho) . \tag{29}$$

Redefinindo os campos por

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho - a \\ \theta' &= \theta \end{aligned} \tag{30}$$

temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho')^2 + \frac{1}{2}(\rho'+a)^2(\partial_\mu \theta')^2 - U(\rho'+a) \ . \tag{31}$$

É fácil ver que

$$D_\mu \rho' = \partial_\mu \rho' \tag{32}$$

e

$$D_\mu \theta' = \partial_\mu \theta' + e A_\mu \ . \tag{33}$$

Procedendo conforme as instruções da equação (26), tem-se, para a lagrangeana com a simetria de padrão correspondente à equação (28), espontaneamente quebrada (veja a Ref. 10 para os detalhes):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho')^2 + \frac{1}{2}(\rho'+a)^2(\partial_\mu \theta' + e A_\mu)^2 + \\ - U(\rho'+a) \tag{34}$$

Fazendo uma mudança de gauge

$$C_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \theta' \tag{35}$$

tem-se, finalmente,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu\right)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho')^2 + \frac{e^2}{2}(\rho'+a)^2 C_\mu^2 - U(\rho'+a) \ . \tag{36}$$

Note-se que o campo θ', que era o campo do boson de Goldstone,de sapareceu. Não há partículas sem massa na lagrangeana (36). O próprio campo de gauge A_μ transformou-se no meson vetorial C_μ, que tem massa $m^2=e^2a^2$. Fazendo uma contagem de graus de liberdade vê-se que o que aconteceu é que o boson de Goldstone foi incorporado ao campo de gauge, formando, juntos, o campo C_μ.

Esta é uma das propriedades mais importantes na aplicação das teorias de gauge, uma vez que não há evidências experimentais de bosons escalares de massa zero. A quebra espontânea de simetrias passa, em teorias de gauge, a ser compatível com os dados experimentais.

Os exemplos já citados contêm todos os elementos de que necessitaremos para nossa futura utilização. O essencial é isto: uma teoria de gauge possui campos de massa zero (os campos de gauge). Se a simetria for espontaneamente quebrada, esses campos adquirem massa. A interação, que era de longo alcance, passa a ser de curto alcance.

Tratamos da eletrodinâmica, o protótipo de uma teoria de gauge, em que a simetria que é generalizada está ligada à transformação (a um parâmetro)

$$\delta\varphi_a = i\,Q_{ab}\,\varphi_b\,\delta\omega\,.$$

A generalização para transformações com um número arbitrário de parâmetros e que formam um grupo não abeliano, é devida a Yang e Mills[13], e é obtida assim (veja Ref.(10) ou Ref.(14)): a teoria de partida tem uma lagrangeana $\mathcal{L}(\vec{\phi}\,,\,\partial_\mu\vec{\phi})$ e é invariante por transformações da forma

$$\delta\vec{\varphi} = T_a\,\delta\omega^a\,\vec{\varphi} \tag{37}$$

com $\delta\omega^a$ constantes (a=1,....n), e T_a sendo matrizes. Tomemos agora $\delta\omega^a$ como funções de $\underline{x}$. Uma vez que

$$\delta(\partial_\mu \vec{\varphi}) = T_a\, \delta\omega^a\, \partial_\mu \vec{\varphi} + T_a\, (\partial_\mu \delta\omega^a)\, \vec{\varphi} \tag{38}$$

a teoria não será mais invariante. Para remediar isso, introduzem-se n novos campos A_μ^a (campos de gauge) de massa zero, e definimos as derivadas covariantes

$$D_\mu \vec{\varphi} = \partial_\mu \vec{\varphi} + g\, T_a\, A_\mu^a\, \vec{\varphi} \tag{39}$$

onde g é um novo parâmetro. Impondo que os A_μ^a se transformem segundo

$$\delta A_\mu^a = c^{abc}\, \delta\omega^b\, A_\mu^c - \frac{1}{g}\, \partial_\mu \delta\omega^a \tag{40}$$

obtêm-se que

$$\delta(D_\mu \vec{\varphi}) = T_a\, \delta\omega^a\, D_\mu \vec{\varphi} \tag{41}$$

sendo os c^{abc} as constantes de estrutura do grupo de transformações. A lagrangeana invariante pelas transformações de gauge é

$$-\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}^a\right)^2 + \mathcal{L}(\vec{\varphi}, D_\mu \vec{\varphi}) \tag{42}$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\, c^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \, . \tag{43}$$

A simetria de gauge de (42) é, por construção, relativa a um grupo de $\underline{n}$ parâmetros. A quebra espontânea pode ser em vários níveis. Em geral se supõe que é tal que a simetria rema nescente corresponde apenas a um subgrupo de 1 parâmetro. Então, n-1 campos de gauge adquirem massa. O n-ésimo, que permanece de massa nula, é o fóton.

6. Quebra Espontânea de Simetria na Presença de um Campo Gravitacional Externo

Todos os exemplos de quebra espontânea de simetria dados até agora dependeram da presença na lagrangeana de um termo de massa com o sinal errado. Isto não é, contudo, necessário. São conhecidos exemplos de quebras espontâneas de simetrias em lagrangeanas sem termos de massa, em que as partículas adquirem massa por causa da quebra de simetria[15]. Para fins de aplicação à cosmologia, é importante verificar o papel que o campo gravitacional pode desempenhar[16].

Consideremos o campo gravitacional do modelo de Friedmann aberto[17]

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[d\eta^2 - d\chi^2 - \operatorname{senh}^2\chi\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2)\right] \tag{44}$$

onde $a(\eta)$ é um fator de escala do modelo, e η é dado em termos do tempo próprio síncrono por $dt=a(\eta)d\eta$. Estaremos sempre tomando $h=c=1$.

Tomemos agora um campo complexo $\Phi(x)$ que interage segundo a densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi^*}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} - \frac{R}{6}\phi^*\phi - \frac{\lambda}{6}(\phi^*\phi)^2\right] \tag{45}$$

onde R é a curvatura escalar do espaço-tempo e λ é uma constante adimensional positiva. Esta é a extensão natural de uma interação $\lambda(\Phi^*\Phi)^2$ a um espaço-tempo curvo, pois o conjunto de simetrias que a teoria tem em sua versão Minkowskiana é conservado o quanto possível (vide Refs. (16) e (18)).

As equações de Euler-Lagrange são

$$\Box \phi(x) + \frac{R}{6}\phi(x) + \frac{\lambda}{3}\phi^*(x)\phi^2(x) = 0 \tag{46}$$

onde

$$\Box \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\beta}\partial_\beta\right).$$

Por causa da isotropia e homogeneidade do espaço, temos

$$\langle 0|\phi(\eta,\vec{x})|0\rangle = \langle 0|\phi(\eta,0)|0\rangle = g(\eta) \tag{47}$$

Tomando o valor esperado no vácuo de (46) termo a termo e usando a aproximação

$$\langle 0|\phi^*(x)\phi^2(x)|0\rangle = \langle 0|\phi^*(x)|0\rangle\langle 0|\phi(x)|0\rangle^2$$

que corresponde à aproximação clássica, e a invariância C da teoria, temos

$$\langle 0|\phi^*(x)\phi^2(x)|0\rangle = g^3(\eta). \tag{48}$$

A equação (46) gera uma equação diferencial para g(η) :

$$\ddot{g} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{g} + \left(\frac{\ddot{a}}{a} - 1\right)g + \frac{\lambda a^2}{3}g^3 = 0 \tag{49}$$

onde se usou a expressão da curvatura escalar

$$\mathcal{R} = -\frac{6}{a^3}\,(a - \ddot{a})$$

e o ponto significa derivação em η. Introduzindo uma nova variável $f(\eta)$ por meio de

$$g(\eta) = \sqrt{\frac{3}{\lambda}}\;\frac{f(\eta)}{a(\eta)} \tag{50}$$

tem-se a equação para $f(\eta)$:

$$\ddot{f} - f + f^3 = 0 \;. \tag{51}$$

A solução geral é

$$\frac{f^2(\eta)}{1+\sqrt{1+2C}} = 1 - sn^2\left(\sqrt[4]{1+2C}\;\eta\,,\;\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+2C}}}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{1+2C}}\right) \tag{52}$$

onde

$$\sqrt{1+\sqrt{1+2C}} > f \geqslant 0 \tag{52a}$$

e <u>sn</u> é a função elíptica de Jacobi denominada seno-amplitude.

O vácuo é o estado de menor energia. Para conhecer o valor esperado no vácuo do campo Φ, precisamos saber para que solução das escritas em (52) se tem a menor energia. Por causa da homogeneidade do espaço é suficiente procurar a que corresponde à menor densidade de energia.

O tensor de momento-energia correspondente à lagrangeana (45) é dado por (Ref. (18)):

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial\phi^*}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} + \frac{\partial\phi^*}{\partial x^\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} - g_{\alpha\beta}\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} - \frac{1}{3}\left[R_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha\nabla_\beta - g_{\alpha\beta}\Box\right]\phi^*\phi \tag{53}$$

onde ∇_α é a derivada covariante e $R_{\alpha\beta}$ é o tensor de Ricci. A densidade de energia $\varepsilon(\eta)$ é

$$\varepsilon(\eta) = \langle 0|T_0{}^0|0\rangle = \frac{3f^2}{\lambda a^4}\left(-1 + \frac{f^2}{2} + \frac{\dot{f}^2}{f^2}\right)$$

$$\varepsilon(\eta) = \frac{3C}{\lambda a^4} \tag{54}$$

onde C é a constante que aparece em (52).

A expressão (54) é a mais importante deste capítulo. Ela mostra que o menor valor de $\varepsilon(\eta)$ é atingido para o menor valor possível de C compatível com (52a), que é $C=-\frac{1}{2}$. Tem-se, então, $f=\pm 1$, e

$$g(\eta) = \pm\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\;\frac{1}{a} \; . \tag{55}$$

Logo, o valor esperado no vácuo do campo Φ não é zero, e isto traduz uma quebra espontânea de simetria. Na lagrangeana (45), coloquemos

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\,\phi_2\right) \tag{56}$$

e redefinamos o campo Φ_1 por meio de

$$\phi_1^0 = \phi_1 - \langle 0|\phi_1|0\rangle = \phi_1 - \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\;\frac{1}{a} \; . \tag{57}$$

Reescrevendo $\mathcal{L}$ em termos de Φ_2 e Φ_1^0, teremos a ação

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x \sqrt{-g}\,\Big[g^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi_1^0}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \phi_1^0}{\partial x^\beta} - \left(\frac{3}{a^2} + \frac{R}{6}\right)\phi_1^{0\,2} +$$

$$+ g^{\alpha\beta}\frac{\partial \phi_2}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \phi_2}{\partial x^\beta} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{R}{6}\right)\phi_2^2 +$$

$$- \sqrt{\frac{2\lambda}{3}}\,\frac{1}{a}\,\phi_1^0\left(\phi_1^{0\,2} + \phi_2^2\right) - \frac{\lambda}{12}\left(\phi_1^{0\,2} + \phi_2^2\right)^2 \Big] \tag{58}$$

de onde se vê que a teoria, que no espaço-tempo de Minkowski seria de massa zero, ganhou, pela interação com o campo gravitacional, massas $\frac{\sqrt{3}}{a}$ e $\frac{1}{a}$ para os bosons descritos pelos campos Φ_1^0 e Φ_2, respectivamente. É importante notar que a mesma teoria <u>não</u> apresenta quebra espontânea de simetria, ou geração de massa, no caso do universo fechado de Friedmann[16].

Na presença de uma interação de tipo gauge, também o campo de gauge adquire massa (mecanismo de Higgs). Utilizando o acoplamento "mínimo" característico deste tipo de teoria (vide equações (22) e (39)), a lagrangeana é escrita (aqui, $\Phi' = e^{i\Lambda(x)}\Phi$; $A'_\mu(x) - \frac{1}{e}\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu}$),

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\,\Big[g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha - ie A'_\alpha)\phi'^*(\partial_\beta + ie A'_\beta)\phi' - \frac{R}{6}\phi'^*\phi' -$$

$$- \frac{\lambda}{6}(\phi'^*\phi')^2 - \frac{1}{4}F'_{\alpha\beta}F'^{\alpha\beta} \tag{59}$$

No gauge unitário[16,19] se tem

$$\langle 0|\phi'|0\rangle = i\langle 0|\phi|0\rangle = i\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\,\frac{f}{a}$$

$$\phi' = \frac{\phi'_1 + i\phi'_2}{\sqrt{2}} \;; \qquad \phi'_1 = 0 \;. \tag{60}$$

Introduzindo o campo de Higgs por meio de

$$\chi(x) = \Phi_2' - \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\,\frac{1}{a} \tag{61}$$

obtém-se para a ação:

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{ & g^{\alpha\beta}\frac{\partial\chi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\chi}{\partial x^\beta} - \left(m_1^2 + \frac{R}{6}\right)\chi^2 + e^2 g^{\alpha\beta}A'_\alpha A'_\beta\,\chi^2 - \\ & - \frac{1}{2}F'_{\alpha\beta}F'^{\alpha\beta} + m_v^2\, g^{\alpha\beta}A'_\alpha A'_\beta - \sqrt{\frac{2\lambda}{3}}\,\frac{1}{a}\chi^3 - \frac{\lambda}{12}\chi^4 + \\ & + 2e^2\sqrt{\frac{6}{\lambda}}\,\frac{1}{a}\,g^{\alpha\beta}A'_\alpha A'_\beta\,\chi \Big\} \end{aligned} \tag{62}$$

sendo $m_1^2 = \dfrac{3}{a^2}$ e $m_v^2 = \dfrac{6e^2}{\lambda a^2}$

Estes resultados dependem fortemente da presença do termo $\frac{R}{6}$ na algrangeana. Se ele deve existir ou não, é matéria polêmica. A nós parece que sim, uma vez que dá às teorias de massa zero uma simetria que, no espaço-tempo Minkowskiano, corresponde à invariancia conforme. Um argumento contra este argumento foi apresentado por Parker[20]. De qualquer forma, a teoria com o termo $\frac{R}{6}$ existe, é a mais simples, e não se pode excluir que tenha algum papel na cosmologia.

7. Correções Radiativas (Para quem conhece Teoria de Campos)

Tudo o que fizemos até agora foi na aproximação clássica (tree approximation). Contribuições das correções radiativas podem, porém, ser importantes. Ocasionalmente podem até ser dominantes, como em situações nas quais não há quebra espontânea de si metria em nível clássico, o fenômeno aparecendo apenas a nível de correções radiativas. O exemplo mais famoso é o trabalha de Coleman e Weinberg (Ref. 15).

A maneira mais eficiente de se estudar as correções radiativas à quebra espontânea de simetria é através do potencial efetivo[21]. A técnica usada aqui é a da Ref. 22.

O potencial efetivo é a função geratriz das funções de Green próprias (1PI) com momento zero em todas as pernas[23]. Considere a lagrangeana

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - U(\varphi) \tag{63}$$

onde $U(\phi)$ é um polinômio no campo escalar ϕ. O potencial efetivo é definido assim: o funcional gerador das funções de Green 1PI, $\Gamma[\phi]$ pode ser expandido em potências das derivadas do campo.

$$\Gamma[\phi] = -\int d^4x \left[V(\varphi) - \frac{1}{2} Z\, (\partial_\mu \varphi)^2 + \cdots \right] \tag{64}$$

onde V, Z, são funções ordinárias de ϕ. $V(\phi)$ é o potencial efetivo. A maneira usual de escrever $\Gamma[\phi]$ é

$$\Gamma[\phi] = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n\, \Gamma^{(n)}(x_1, \ldots x_n)\, \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \tag{65}$$

onde $\Gamma^{(n)}(x_1, \ldots . x_n)$ é a função de Green 1PI de n pontos. No espaço dos momentos (65) é escrita

$$\Gamma[\varphi] = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x\, [\varphi(0)]^n\, \tilde{\Gamma}^{(n)}(0, \ldots 0) \tag{66}$$

sendo as componentes de Fourier calculadas a momento nulo.

Comparando com (64) obtém-se, para ϕ constante,

$$V(\varphi) = - \sum_{n} \frac{1}{n!} \tilde{\Gamma}^{(n)}(0, \ldots 0)\, \varphi^{n} \tag{67}$$

que permite o cálculo do potencial efetivo em termos de uma série infinita cujos coeficientes são as funções de Green 1PI a momentos nulos.

Symanzik[24] mostrou que $V(\phi)$ é o valor esperado da densidade de energia em um estado para o qual o campo tem o valor constante ϕ. Na aproximação clássica, $V(\phi)$ coincide com $U(\phi)$ da equação (63). Para uma teoria com quebra espontânea de simetria, na qual o valor esperado no vácuo do operador de campo não se anula, sendo igual a $\underline{v}$, tem-se

$$V(\varphi) = - \sum_{n} \frac{1}{n!} \tilde{\Gamma}^{(n)}(0, \ldots 0)\, (\varphi - v)^{n} \tag{68}$$

Desta equação segue que

$$\left. \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi = v} = 0 \tag{69}$$

que permite o cálculo do valor esperado no vácuo como a solução de um problema de mínimo. Uma maneira prática de calcular $V(\phi)$ é a seguinte[22]: seja $(\phi, \partial_\mu \phi)$ a lagrangeana. Introduza-se um novo campo por meio de

$$\varphi'(x) = \varphi(x) - v$$

onde v é um parâmetro arbitrário. A lagrangeana transformada é $\mathcal{L}'(\phi', \partial_\mu \phi')$, que contém alguns novos vértices, dependentes de v. A equação (66) pode ser reescrita como

$$\Gamma[\varphi' + v] = \sum_{n} \frac{1}{n!} \int d^n x_1 \ldots d^n x_n\, \Gamma^{(n)}(x_1, \ldots x_n) \left[\varphi'(x_1) + v\right] \ldots \left[\varphi'(x_n) + v\right] \tag{70}$$

Definindo

$$\Gamma'[\varphi'] = \Gamma[\varphi'+v]$$

e re-somando a equação (70), tem-se

$$\Gamma'[\varphi'] = \sum_n \frac{1}{n!}\int d^4x_1 \ldots d^4x_n\, \bar{\Gamma}'^{(n)}(x_1,\ldots x_n)\,\varphi'(x_1)\ldots\varphi'(x_n)\,. \tag{71}$$

Na aproximação clássica (tree) $\Gamma'[\phi']$ coincide com o lagrangeano $\mathcal{L}'(\phi',\partial_\mu\phi')$. Logo, $\bar{\Gamma}^{(n)}(x_1,\ldots x_n)$ são as funções de Green 1PI calculadas com as regras de Feynman da lagrangeana $\mathcal{L}'$. Por meio de uma transformada de Fourier, (71) se escreve

$$\Gamma'[\varphi'] = \sum_n \frac{1}{n!}\int d^4x\,[\varphi'(0)]^n\,\tilde{\bar{\Gamma}}^{(n)}(0,\ldots 0) \tag{72}$$

onde $\tilde{\bar{\Gamma}}^{(n)}(0,\ldots 0)$ é a função de Green 1PI da lagrangeana $\mathcal{L}'$. Para ϕ' constante, tem-se

$$V'(\varphi') \equiv V(\varphi'+v) = -\sum_n \frac{1}{n!}\,\tilde{\bar{\Gamma}}^{(n)}(0,\ldots 0)\,\varphi'^{\,n}\,. \tag{73}$$

Segue que

$$\left.\frac{dV(\varphi'+v)}{d\varphi'}\right|_{\varphi'=0} = -\tilde{\bar{\Gamma}}^{(1)}(0)\,. \tag{74}$$

Como $\left.\frac{dV(\varphi'+v)}{d\varphi'}\right|_{\varphi'=0} = \left.\frac{dV(\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi=v}$ tem-se

$$\left.\frac{dV}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \frac{dV}{dv} = -\tilde{\bar{\Gamma}}^{(1)}(0)\,. \tag{75}$$

Isto é, a derivada de V em função de v é dada, ordem por ordem, pelos tadpoles relativos à lagrangeana $\mathcal{L}'$.

Na Ref. (22), este método é aplicado no cálculo do potencial efetivo da eletrodinâmica de bosons de massa zero, e da teoria de Yang-Mills. Atualmente se estuda sua adaptação para o estudo da quebra espontânea de simetria a temperaturas finitas. Note-se que o potencial efetivo $V(\phi)$ é o valor esperado da componente T^0_0 do tensor de momento-energia em um estado correspondente a ϕ constante. Logo, o problema de construir o potencial efetivo de uma teoria definida em um espaço-tempo curvo coincide com o problema de construir e regularizar o tensor de momento-energia em um espaço-tempo curvo.

8. Transições de Fase de 2a. Ordem

Uma transição em que um sistema termodinâmico passa de uma fase com uma determinada simetria a outra com uma simetria diversa, não pode se dar continuamente, no sentido de que não é possível a existência de estados em que as duas fases se confundam, como acontece com líquido e vapor(25). Em cada estado de agregação o corpo possui uma ou outra das simetrias e, por isso, é sempre possível especificar em que fase ele se encontra. A transição entre diferentes simetrias se dá, usualmente, por saltos, produzindo-se uma reestruturação súbita no estado de agregação do corpo. Pode haver, não obstante, um outro tipo de transição entre simetrias diferentes, em que algumas das propriedades do corpo variem continuamente (embora a simetria varie descontinuamente). São as chamadas transições de fase de 2a. ordem. Para exemplificá-las, recorreremos a um exemplo fictício.

Imagine-se um corpo que, a baixas temperaturas, cristalize no sistema tetragonal, isto é, tenha uma célula cristalina em forma de paralelepípedo retangular de base quadrada, com a altu ra $\underline{c}$ diferente da aresta da base $\underline{a}$. Suponhamos que $\underline{c}$ seja ligeiramente maior que $\underline{a}$, e que os coeficientes de dilatação sejam tais, a baixas temperaturas, que as arestas da base se dilatem mais do que a aresta $\underline{c}$. A uma determinada temperatura, $\underline{a}$ se tornará igual a $\underline{c}$. Suponhamos que a partir desta temperatura os coeficientes de dilatação passem a ser iguais. Então, àquela temperatura, a simetria cristalina passa a ser cúbica. Como a das posições dos átomos é contínua, muitas das propriedades do corpo variarão continuamente: volume, energia interna, entropia, etc.. Por isso, em particular, uma transição de fase deste tipo não é acompanhada de liberação ou absorção de calor. Por outro lado, no ponto de transição se produz uma variação descontínua na dependência dessas quantidades com a temperatura. Por exemplo, até por construção, o coeficiente de dilatação térmica é muito diferente em uma e outra das fases, no cristal que consideramos acima. Os calores específicos são igualmente descontínuos. Exemplos de transição deste tipo são o ferromagnetismo, a passagem de um metal ao estado de supercondutor (na ausência de campo magnético externo), a passagem do hélio ao estado superfluido.

Vamos agora descrever muito rapidamente a teoria de Landau das transições de fase de 2a. ordem (Ref. 25).

Para caracterizar quantitativamente as simetrias introduz-se o <u>parâmetro de ordem</u> η , definindo-o de maneira que seja zero na fase mais simétrica, e diferente de zero na fase menos simétrica. No exemplo dado, o parâmetro de ordem poderia ser a diferença entre $\underline{c}$ e $\underline{a}$. Na fase cúbica, $\eta=0$, na tetragonal, $\eta\neq0$.

Considerando as grandezas termodinâmicas do cristal a um valor dado de η , podemos pensar o potencial termodinâmico como uma função de P , T e η. Contudo, na função $\Phi(P,T,\eta)$,a última variável desempenha um papel diferente, pois, dados P e T de uma maneira arbitrária, η é determinado pelo fato de que deve ter o valor que minimiza o potencial para os valores dados de P e T. A continuidade da variação do estado durante uma transição de fase de 2a. ordem se exprime matematicamente pelo fato de que, nas vizinhanças do ponto de transição, η assume valores arbitrariamente pequenos, Ali, então,

$$\Phi(P,T,\eta) = \Phi_0 + \alpha\eta + A\eta^2 + B\eta^3 + C\eta^4 + \tag{76}$$

sendo os coeficientes α, A, B, C... funções de P e T.

Teorema 1: Se os estados com $\eta=0$ e $\eta\neq 0$ se distinguem pela simetria, então $\alpha\equiv 0$. (Vide Ref. 25, § 139).

Teorema 2: No ponto de transição, $A(P,T)=A_c(P,T)=0$

Demonstração: a) Na fase simétrica, $\eta=0$ deve corresponder a um mínimo de Φ. Logo, devemos ter $\left.\frac{d\Phi}{d\eta}\right|_{\eta=0}=0$ e $\left.\frac{d^2\Phi}{d\eta^2}\right|_{\eta=0}>0$. Esta última condição é $2A>0$.

b) Na fase não-simétrica, $\eta\neq 0$ deve corresponder a um mínimo de Φ, isto é, para cada par (P,T) deve haver um mínimo de Φ em um ponto diferente de zero. Para que isto ocorra, A deve ser negativo na fase não-simétrica.

Então, como $A>0$ de um lado do ponto de transição e $A<0$ do outro, no ponto de transição devemos ter $A=0$.

Teorema 3: $B_c(P,T)=0$ e $C_c(P,T)>0$.

Pois então, no ponto de transição,

$$\Phi = \Phi_0 + B_c\eta^3 + C_c\eta^4$$

Para que haja mínimo para $\eta=0$, é preciso que

$$\frac{d\Phi}{d\eta} = 3\eta^2 B_c + 4\eta^3 C_c$$

mude de sinal ao passar por $\eta=0$. Para isso, $B_c=0$. É óbvio que $C_c>0$, para que se tenha um mínimo.

Há duas situações possíveis:

1) $B(P,T)\equiv 0$. A condição que determina o ponto de transição é, então,

$$A(P,T) = 0 ,$$

e se tem uma <u>curva de transição</u> $P=P(T)$.

2) B não é identicamente nulo. Há então duas equações caracterizando os pontos de transição:

$$B(P,T) = 0 \quad \text{e} \quad A(P,T) = 0 .$$

Isto significa pontos de transição isolados.

Suporemos sempre $B\equiv 0$.

Resumindo, temos:

$$\Phi(P,T,\eta) = \Phi_0(P,T) + A(P,T)\eta^2 + C(P,T)\eta^4 + \ldots \tag{77}$$

sendo $C>0$ e

$$\begin{aligned} &A>0 \quad \text{na fase simétrica} \\ &A<0 \quad \text{na fase não-simétrica} \\ &A(P,T)=0 \quad \text{determina a curva de transição.} \end{aligned} \tag{78}$$

Fixando-se a pressão, examinemos Φ do ponto-de-vista da temperatura. Nas vizinhanças do ponto de transição T_c , tem-se

$$A(T) = a(T-T_c) \tag{79}$$

e para C usaremos a aproximação

$$C(T) = C(T_c) . \tag{80}$$

Para determinar η em função da temperatura, põe-se

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = \eta(A+2C\eta^2) = 0$$

obtendo-se

$$\eta = 0$$

$$\eta^2 = -\frac{A}{2C} \qquad (81)$$

É fácil ver, examinando-se a derivada segunda de Φ, que $\eta=0$ corresponde à fase simétrica, enquanto a segunda solução vale para a fase não-simétrica.

9. Teoria da Supercondutividade de Ginzburg-Landau[27]

Ginzburg e Landau trataram a supercondutividade, que é, na ausência de campos magnéticos, uma transição de fase de 2a. ordem, na linguagem da teoria de Landau para essas transições. Que importância cosmológica pode ter a supercondutividade? Em si, nenhuma. Contudo, a estrutura formal da teoria de Ginzburg-Landau é muito semelhante à de uma teoria de campos com quebra espontânea de simetria. Foi explorando esta semelhança que Kirzhnits e Linde[7,8] descobriram o fenômeno de restauração de uma simetria quebrada, por efeitos de alta temperatura e/ou campos externos, fenômeno este de grande importância cosmológica.

Na teoria de Ginzburg-Landau o parâmetro de ordem, denotado por ψ, será tal que

$$\psi=0 \quad \text{para} \quad T>T_c$$

$$\psi\neq 0 \quad \text{para} \quad T<T_c \ ,$$

onde T_c é a temperatura crítica, isto é, a temperatura em que o material (mercúrio, nióbio, etc.) se torna supercondutor[28].

A idéia de partida é que ψ representa uma "função de onda efetiva" dos elétrons supercondutores. Logo, ψ deve ser determinada a menos de uma fase. Isto quer dizer que as quantidades observáveis devem depender apenas de combinações de ψ e ψ^* invariantes por transformações $\psi \to e^{i\alpha}\psi$, onde $\underline{\alpha}$ é real.

Considere um superondutor uniforme na ausência de um campo magnético, e suponha que ψ seja independente da posição. De acordo com a teoria das transições de fase de segunda ordem, para T suficientemente próxima de T_c, a energia livre por unidade de volume do material é escrita

$$F_{sc} = F_{nc} + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 \tag{82}$$

onde $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ são funções de T, com $\alpha_c=0$ e $\beta_c>0$. Além disso,

$$\alpha(T) \begin{cases} >0 & \text{para} \quad T > T_c \\ <0 & \text{para} \quad T < T_c \end{cases} \tag{83}$$

No equilíbrio, naturalmente,

$$\frac{\partial F_{so}}{\partial |\psi|^2} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial F_{so}}{\partial (|\psi|^2)^2} > 0 \tag{84}$$

Note-se a analogia com o tratamento da quebra espontânea de simetria da lagrangeana da Eq. (1).

$$-\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \,. \tag{1}$$

Em (1), há quebra espontânea de simetria quando o coeficiente de ϕ^2 em $-\mathcal{L}$ for negativo, e o de ϕ^4 positivo (o que interessa, realmente, é o sinal relativo dos dois coeficientes). Em (82), estas condições caracterizam a região onde $T<T_c$, isto é, onde a simetria é menor (ou, foi quebrada). O valor esperado no vácuo de ϕ,

que é o parâmetro que caracteriza a quebra, é obtido pelas mesmas operações que determinam ψ (Eq. (84)). Isto é, $<0|\phi|0>$ é o parâmetro de ordem da teoria (1). Da mesma forma, quando, em (1), o coeficiente de ϕ^2 tem o mesmo sinal do de ϕ^4, não há quebra espontânea de simetria. Correspondentemente, neste caso, se está na região $T>T_c$, onde a fase é mais simétrica, e o parâmetro de ordem vale zero.

Na presença de um campo magnético $\mathbb{H}$, a energia livre de um supercondutor (por unidade de volume) passa a ser (vide Ref. 27 ou 28)

$$F_{SH} = F_{uc} + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{2m}\left|\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbb{A}\right)\psi\right|^2 + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 \qquad (85)$$

onde $\mathbb{A}$ é o potencial vetor. O modelo de Higgs (Eq. (26)) com interação $\lambda|\phi|^4$ não é senão uma generalização covariante da Eq. (85). Em (85), como no modelo de Higgs, para α negativo, ocorre uma quebra de simetria (fase supercondutora) e o campo passa a ter massa, cuja manifestação é o efeito Meissner.

Um supercondutor volta ao estado normal quando $T>T_c$, ou quando, para $T<T_c$, um campo externo suficientemente forte ($H>H_c(T)$) é aplicado sobre ele. Kirzhnits e Linde[7,8] conjecturaram que efeitos análogos deveriam acontecer em teorias de gauge com quebra espontânea de simetria: a uma temperatura suficientemente elevada, um sistema descrito por uma lagrangeana de gauge com a simetria espontânea quebrada deveria ter sua simetria restaurada. Um efeito análogo deveria aparecer devido à presença de "campos magnéticos" suficientemente fortes. Passaremos agora a tratar dos efeitos de temperatura.

10. Restauração de Simetrias a Altas Temperaturas[7,8,9]

Vamos daí aqui um tratamento extremamente simplificado do problema. Para uma formulação completa vide Ref.(9) e a tese de livre-docência de M.O.C. Gomes (IFUSP-1979).

Considere, ainda uma vez, a lagrangeana de Goldstone

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - U(\phi)$$

Como já vimos, o vácuo é o campo constante que minimiza $U(\Phi)$.

$$\frac{dU}{d\phi} = 0 \Rightarrow -\mu^2\phi + \lambda\phi^3 = 0$$

$$\tilde{\phi} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$$

onde $\tilde{\Phi}$ é o valor esperado no vácuo de Φ. A diferença crucial entre as teorias com e sem quebra espontânea de simetria é dada pela quantidade $\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$, que tem, no sistema de unidades em que $c=1$, a dimensão de energia. Suponhamos que o sistema descrito pela lagrangeana de Goldstone seja colocado em um banho térmico à temperatura T. Quando a energia térmica fornecida ao sistema for da ordem de $\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$, a diferença entre as duas teorias (simétrica e não-simétrica) desaparece. O número de graus de liberdade de um campo constante é 1 (o valor da constante). Logo, em unidades convencionais, devemos ter

$$\frac{1}{2} k\, T_c = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} c^2$$

para a menor temperatura em que a quebra de simetria desaparece.

Nas unidades "naturais",

$$T_c = \frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}} \quad .$$

Este é, exatamente, o resultado de Kirzhnits, Linde, Weinberg, Dolan, Jackiw. (Para os parâmetros usuais da teoria de Weinberg-Salam, $T_c \sim 10^{16}\ {}^oK$, segundo Kirzhnits, Linde[8]). Temperaturas assim elevadas devem ter ocorrido nos estágios iniciais da evolução do universo, o que dá a essas transições de fase, em princípio, interesse cosmológico. Há, porém, um aspecto que deve ainda ser considerado: possíveis efeitos do campo gravitacional. Exibimos a seguir uma situação, consideravelmente simples, em que a transição de fase é inibida pelo campo gravitacional. A idéia é simples: levar em conta parte da ação do campo gravitacional através da definição da teoria de campo em questão no espaço-tempo curvo, com a métrica de background dada por um modelo cosmológico. Tomemos, por exemplo, o modelo descrito no Capítulo 6. Vimos ali que o valor esperado no vácuo do campo $\Phi(x)$ é dado por (Eq. 50)

$$\langle 0|\Phi(x)|0\rangle = \sqrt{\frac{3}{\lambda}}\ \frac{1}{a(\eta)} \quad .$$

Logo, usando o método exposto acima para estimar a temperatura crítica, temos

$$T_c \approx \sqrt{\frac{3}{\lambda}}\ \frac{1}{a} \tag{86}$$

Note-se o importante fato de que T_c depende do tempo através de $a(\eta)$. Isto é característico de espaço-tempos curvos, e vem do fato de que, neste caso, a ausência da invariância de Poincaré não permite concluir que o valor esperado no vácuo de um campo escalar é uma constante. Como a temperatura T do universo também depende do tempo, é importante saber se, dinamicamente, T po de igualar (ou ultrapassar) T_c .

Vamos supor, para o universo jóvem, a equação de estado

$$p = \frac{\varepsilon}{3} \quad , \tag{87}$$

onde p é a pressão e ε a densidade de energia. É fácil ver[17] que, sob a hipótese de entropia constante,

$$\varepsilon a^4 = \text{constante} \tag{88}$$

A temperatura de equilíbrio depende da evolução do universo. Suponhamos, então, que

$$T = A\, a^{\ell} \tag{89}$$

onde A é uma constante e ℓ é um número a ser determinado. Combinando (88) e (89) tem-se

$$T = A' \varepsilon^{-\frac{\ell}{4}} \tag{90}$$

onde A' é outra constante. Sendo S a entropia e U a energia, tem-se

$$\left[\frac{\partial S}{\partial U}\right]_V = \frac{1}{T} = \frac{1}{A'}\,\varepsilon^{\frac{\ell}{4}} = \frac{1}{A'}\left[\frac{U}{V}\right]^{\frac{\ell}{4}} \tag{91}$$

e

$$\left[\frac{\partial S}{\partial V}\right]_U = \frac{p}{T} = \frac{1}{3A'}\,\varepsilon^{1+\frac{\ell}{4}} = \frac{1}{3A'}\left(\frac{U}{V}\right)^{1+\frac{\ell}{4}} \tag{92}$$

Integrando (91) acha-se

$$S = \frac{1}{A'} \frac{1}{V^{\frac{\ell}{4}}} \frac{U^{1+\frac{\ell}{4}}}{1+\frac{\ell}{4}} + C(V) \tag{93}$$

para $\ell \neq -4$. Para $\ell = -4$ obtém-se, ao invés de (92),

$$\left[\frac{\partial S}{\partial V}\right]_U = \frac{1}{3A'}$$

que, por integração, dá

$$S = \frac{V}{3A'} + K(U) \tag{94}$$

que contradiz (91), já que K' é função apenas de U . Então, $\ell \neq -4$, e voltamos à equação (93). Derivando em V obtém-se

$$C'(V) = \left(\frac{S}{V}\right)_U + \frac{\ell}{A'(4+\ell)} \left[\frac{U}{V}\right]^{1+\frac{\ell}{4}} \tag{95}$$

que, combinada com (92), dá

$$C'(V) = \frac{1}{A'} \left[\frac{U}{V}\right]^{1+\frac{\ell}{4}} \left[\frac{1}{3} + \frac{\ell}{4+\ell}\right] . \tag{96}$$

Como C' é função apenas de V , a consistência exige que $\ell = -1$.

Então,

$$T = \frac{A}{a(\eta)} \tag{97}$$

Comparando com a equação (86), temos

$$\frac{T_c}{T} = \text{constante} \tag{98}$$

Assim, para este particular modelo, a quebra espontânea de simetria (ou a ausência dela) existe durante toda a evolução do universo, segundo seja a "constante" da equação (98) menor ou maior que 1 nos nossos dias. Como o espectro das partículas hoje conhecidas favorece a quebra espontânea de simetrias, podemos ver que, no modelo considerado, a transição de fase não se dá.

Vemos assim que a inclusão, mesmo parcial, dos efeitos da gravitação pode inibir uma transição de fase que, no espaço-tempo de Minkowski, parecia inevitável.

REFERÊNCIAS

(1) S. Weinberg, Gravitation and Cosmology (New York, 1972).

(2) Um excelente review sobre os artigos aqui tratados é o artigo de A.D. Linde, Phase transitions in gauge theories and cosmology, Reports on Progress in Physics, 42 (1979), 380, que possui uma excelente bibliografia.

(3) Vide, p. ex., R. Aldrovandi, Teorias clássicas de gauge e gravitação, preprint IFT C-01/78, do Instituto de Física Teórica (São Paulo); D.A. Popov, Theor. Math. Physics 24, 347 (1975); D.A. Popov, L.I. Daiklin, Doklady 20, 818 (1976).

(4) S. Weinberg, Phys. Rev. Letters 19, 1264 (1967).
A. Salam, in N. Svartholm (ed.), Elementary Particle Theory: Proceedings of the Eight Nobel Symposium (Lerum, Socken, 1968).

(5) A. Zee, Phys. Rev. Letters 42, 417 (1979).

(6) Vide, p. ex., J. Bernstein, Spontaneous symmetry breaking, gauge theories, the Higgs mechanism and all that, Rev. Mod. Phys. 46, 7 (1974).

(7) D.A. Kirzhnits, JETP Letters, 15, 529 (1972).

(8) D.A. Kirzhnits, A.D. Linde, Physics Letters 42B, 471 (1972).

(9) S. Weinberg, Phys. Rev. D9, 3357 (1974); L. Dolan, R. Jackiw, Phys. Rev. D9, 3320 (1974).

(10) S. Coleman, Secret Symmetry in A. Zichichi (ed.), Laws of Hadronic Matter (Academic Press, New York, 1975).

(11) J. Goldstone, Nuovo Cimento 19, 15 (1961); Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122, 345 (1961); 124, 246 (1961); J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, Phys. Rev. 127, 965 (1962).

(12) F. Englert, R. Brout, Phys. Rev. Letters 13, 321 (1964); P. Higgs, Physics Letters 12, 132 (1964); G. Guralmik, C. Hagen, T. Kibble, Phys. Rev. Letters 13, 585 (1964); P. Higgs, Phys. Rev. 145, 1156 (1966); T. Kibble, Phys. Rev. 155, 1554 (1967).

(13) C.N. Yang, R. Mills, Phys. Rev. 96, 191 (1954).

(14) E.S. Abers, B.W. Lee, Physics Reports 9C, Nº 1 (1973).

(15) S. Coleman, E. Weinberg, Phys. Rev. D7, 1888 (1973); D.J. Gross, A. Neveu, Phys. Rev. D10, 3235 (1974); H. Fleming, K. Furuya, Nuovo Cimento 46A, 189 (1978); H. Fleming, Nuovo Cimento 46A, 246 (1978); H. Fleming, K. Furuya, Nuovo Cimento 49A, 101 (1979); H. Fleming, K. Furuya, J.L. de Lyra, Mass in the Gross-Neveu Model II, a ser publicado em Nuovo Cimento.

(16) V.M. Frolov, A.A. Grib, V.M. Mostepanenko, Theor. Math. Phys. 33, 42 (1977); H. Fleming, J.L. Lyra, C.P.C. Prado, V.L.R. Silveira, Spontaneous Breakdown of Symmetry in Cosmological Models, preprint IFUSP/P-182 (1979); C.P.C. Prado, Estudo da Geração Espontânea de Massa a Partir da Quebra Espontânea de Simetria de Gauge num Universo de Friedmann Aberto, Dissertação de Mestrado, IFUSP (1979).

(17) L.D. Landau, E.M. Lifshitz, The Classical Theory of Fields, 4th. Edition, Pergamon Press (1975). O sinal do tensor de curvatura que usamos é o oposto do desta referência.

(18) N.A. Chernikov, E.A. Tagirov, Ann. Inst. Henri Poincaré 9A, 109 (1968); B. Zumino, Effective Lagragians and Broken Symmetries, in S. Deser (ed.), Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, MIT Press (1970).

(19) J. Bernstein, Rev. Mod. Phys. 46, 7 (1974).

(20) L. Parker, Asymptotic Structure of Space-Time (Plenum, 1976).

(21) G. Jona-Lasinio, Nuovo Cimento 34, 1790 (1964).

(22) P.S.S. Caldas, H. Fleming, R. Lopez Garcia, Effective Potentials in Gauge Field Theories, Nuovo Cimento, 42A, 360 (1977).

(23) Para a nomenclatura usada, vide J.C. Taylor, Gauge Theories of Weak Interactions (Cambridge University Press, 1976), ou Ref. (14).

(24) K. Symanzik, Comm. Math. Phys. 16, 48 (1970).

(25) L.D. Landau, Phys. Z. Soviet Un. 11, 26 (1937). Para um excelente tratamento da teoria de Landau das transições de fase de 2a. ordem, veja L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Physique Statistique, MIR, Moscou (1967). O trabalho original citado encontra-se na Ref. (26).

(26) D. ter Haar (ed.), Men of Physics: L.D. Landau, Vol. II, Pergamon (1969).

(27) V.L. Ginzburg, L.D. Landau, On the Theory of Superconductivity, J. Exp. Theor. Phys. (USSR) 20, 1064 (1950). Tradução em D. ter Haar (ed.), Men of Physics: L.D. Landau, Vol. I, Pergamon Press (1965).

(28) Para uma revisão da fenomenologia da supercondutividade, vide Rose-Innes, Rodheric, Superconductivity (Pergamon Press,). Uma excelente apresentação da teoria se acha em P.G.de Gennes, Superconductivity of Metals and Alloys (Benjamin,). A teoria de Ginzburg-Landau é fenomenológica, mas, nas vizinhanças da temperatura crítica é correta, no sentido de que pode ser obtida da teoria microscópica. Para esta dedução, devida a Gorkov, vide Ref. (29).

(29) A.A. Abrikhosov, L.P. Gorkov, I.E. Dzyaloshinskii, Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics (Dover,). A referência original para a teoria microscópica da supercondutividade é a Ref. (30).

(30) J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, Phys. Rev. 108, 1175 (1957).