UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA
CAIXA POSTAL 20516
01000 - SÃO PAULO - SP
BRASIL

publicações

2 IFUSP/P-418

DILATAÇÃO DO TEMPO E CONTRAÇÃO DAS DISTÂNCIAS: UMA DISCUSSÃO DIDÁTICA

A. Villani

Instituto de Física, Universidade de São Paulo

Julho/1983

DILATAÇÃO DO TEMPO E CONTRAÇÃO DAS DISTÂNCIAS: UMA DISCUSSÃO DIDÁTICA

A. Villani
Instituto de Física, Universidade de São Paulo
São Paulo, SP , Brasil

INTRODUÇÃO

O grande desenvolvimento da Matemática e sua crescente associação à Física tem tornado esta última muito complexa, com consequentes dificuldades para seu entendimento e sua difusão. O ensino de física em nível superior, na tentativa de acompanhar, mesmo que de longe, esse desenvolvimento, tem privilegiado a apresentação do formalismo e sua aplicação em problemas padronizados, marginalizando o esforço de discussão das idéias físicas, de seus pressupostos e de seus significados mais profundos. A consequência desse tipo de ensino é a formação de "técnicos" em cálculos e em resolução de problemas "standard", com grandes lacunas ao nível da intuição física, da capacidade de síntese e da familiaridade com o questionamento.

O ensino da Relatividade tem apresentado uma louvável exceção(1): apesar da grande tendência a focalizar o formalismo matemático e suas consequências, deixando de lado de alguma forma as discussões mais polêmicas em relação ao significado do formalismo, tem havido esforço significativo na discussão das origens de teoria da Relatividade(2),(3),(4), na apresentação didática dos seus "paradoxos"(5) e também na discussão do seu significado físico(6).

O presente trabalho pretende ser uma contribuição neste mesmo sentido; em particular esperamos que ajude a esclarecer o problema da reciprocidade dos efeitos relativísticos tais como a dilatação do tempo(7) e a contração das distâncias(8), enfrentando as dúvidas que mais comumente angustiam os alunos.

Faremos isso em 4 etapas: na primeira tentaremos acompanhar a problemática como se apresenta na visão dos alunos interessados em entender o que está por "trás" do formalismo; na segunda parte focalizaremos o problema numa introdução teórica que o situe de maneira apropriada. Na terceira parte apresentaremos uma dramatização do problema e daquilo que nos parece sua solução. Finalmente, no ítem 4, tentaremos novamente uma discussão teórica que apresente de forma sintética a nossa visão global sobre as raízes do problema enfrentado.

1. O DRAMA DO ALUNO

Na apresentação da teoria da Relatividade em nível introdutório, normalmente o docente, após uma rápida pincelada sobre sua gênese histórica e sobre a plausibilidade de seus postulados, focaliza a dedução das transformações de Lorentz(9). Esta dedução, por levar a fórmulas matemáticas, permite um tratamento bem objetivo, normalmente acompanhado pelos alunos sem grandes dificuldades(10). A mesma objetividade é mantida ao se deduzir, a partir das transformações de Lorentz, algumas de suas consequências mais imediatas: a dilatação do tempo, a contração das distâncias e a defasagem dos relógios(11). Apesar de conceitualmente abstratos, estes efeitos podem ser tornados mais inteligíveis quando acompanhados de exemplificações mais concretas ou através de experiências ideais ou através de medidas feitas em experiências especialmente montadas para isso[12]. Mas as coisas se complicam bastante quando o aluno percebe que estes efeitos são recíprocos: quando ele se dá conta de que, se para o referencial S são os relógios de $\tilde{S}$ que atrasam, para $\tilde{S}$ são os relógios de S que atrasam e analogamente para as réguas em relação aos dois referenciais. Uma primeira tentativa de repor a ordem no pensamento do aluno pode ser feita através da idéia de perspectiva. Como na experiência cotidiana dois observadores se vêem reciprocamente diminuídos pela distância, porque não se poderia também "ver" os relógios dos outros atrasarem?

No entanto a analogia desmorona quando se começa a refletir e se percebe que, no caso da perspectiva, ela é corrigida pelas medidas objetivas que dão seu veredicto final sobre a eventual desigualdade dos objetos medidos; ao contrário, na Teoria da Relatividade, intervalos espaciais e temporais já apresentam o resultado de medidas objetivas e não existe uma super-medida que possa dirimir a dúvida sobre quem tem razão ao afirmar que os relógios do outro referencial estão atrasando e suas réguas encurtando.

Muitos alunos não aguentam a angústia da dúvida: apesar de saberem que dentro da Teoria da Relatividade as medidas feitas em referenciais diferentes são diferentes, no fundo permanecem com a idéia de que se trata de efeitos "aparentes" e não "reais"[15].

No entanto, na mente do aluno que começa a se aprofundar no entendimento das consequências das transformações de Lorentz, inicia-se também um processo pendular que tem como polos duas idéias conflitantes: de um lado a idéia de que o Princípio da Relatividade não pode privilegiar nenhum referencial, do outro lado a idéia intrigante de que se os efeitos são realmente recíprocos não podem ser reais. Afinal, como é possível que as medidas feitas nos diferentes referenciais mostrem que são sempre os relógios do outro que se atrasam?

Quando o professor percebe esta angústia dos alunos, tenta aliviá-la com considerações como as que se referem às maneiras diferentes de medir em cada sistema de referência. Mas não parece ser de grande utilidade acenar para o fato de que a verificação do atraso se dá sempre numa situação em que se comparam as medidas feitas por um relógio num referencial com as medidas feitas por dois relógios num outro referencial em movimento relativo. Afinal das contas, o aluno se coloca a questão: ou o atraso é real e então um dos referenciais tem razão, ou o atraso é imaginário e então as medidas dos dois outros relógios estão viciadas...

Nenhuma das alternativas é satisfatória para o aluno que tentou entender a Teoria da Relatividade e se envolveu com toda a sua paixão.

É para estes alunos e para os professores que querem ajudá-los que propomos as considerações a seguir.

3. O PROBLEMA E SEU CONTEXTO

Na Teoria da Relatividade Restrita todos os referenciais inerciais são equivalentes e não existe um "primus inter pares" que possa dar a palavra definitiva, capaz de dirimir as dúvidas na interpretação das medidas. Todas as medidas registradas em diferentes referenciais são igualmente válidas e igual mente dignas de confiança: nenhuma delas é mais correta ou mais objetiva do que as outras.

A complicação da Teoria da Relatividade vem com a introdução do princípio da invariância da velocidade da luz por mudança de referencial e é uma complicação dupla. Em primeiro lugar, a velocidade da luz define um padrão de tempo. O relógio de luz é então o relógio coerente com a Teoria da Relatividade: ele marca um intervalo regular de tempo cada vez que a luz percorre um intervalo regular espacial. Cada referencial inercial tem o seu relógio regulado pela velocidade da luz naquele referencial. Mas a complicação maior vem do fato de que a velocidade da luz é utilizada também, para sincronizar relógios, ou seja para definir quando dois eventos distantes são simultâneos. Portanto, ao mesmo tempo que a velocidade da luz é utilizada para definir um padrão de tempo porque tem uma velocidade conhecida e constante, é também usada como critério para se estabelecer simultaneidade de dois acontecimentos. É por causa desta sincronização que as medidas feitas em diferentes referenciais não somente se tornam diferentes, mas também se tornam incompatíveis com uma interpretação única. Por causa da sincronização dos relógios dos vários referenciais mediante pulsos de luz somos obrigados a particularizar a análise das medidas e privilegiar um único referencial: aquele em que os relógios estarão sincronizados; consequentemente, os relógios dos outros referenciais em movimento estarão defasados e em atraso. Também é este mesmo referencial que tem o direito de considerar corretas suas medidas e adequados seus instrumentos de medida (réguas e relógios). Em outras palavras, a interpretação das medidas com a finalidade de compará-las credenciando algumas delas, é sempre feita num determinado referencial, no qual, por hipótese, os relógios estão sincronizados corretamente.

É verdade que qualquer um dos sistemas de referência pode ser escolhido para analisar e interpretar as medidas, no entanto, uma vez escolhido um deles, automaticamente são fixados os padrões de tempo e de sincronização, que são os que este referencial utiliza.

Então o problema inicial da plausibilidade dos efeitos recíprocos poderá ser analisado somente dentro de um contexto determinado, ou seja, num determinado referencial.

Convencer-se de que a falta de um referencial privilegiado absoluto nos obriga a escolher para as nossas comparações um referencial relativo é o primeiro passo para a correta formulação da pergunta inicial.

Escolhido então S como nosso referencial de análise, a dúvida inicial poderá ser formulada dessa maneira: é coerente que os relógios de $\tilde{S}$, que anda com velocidade de $\vec{v} = v\hat{i}$ atrasem por causa do movimento e que, simultaneamente, os observadores de $\tilde{S}$ achem que o atraso está nos nossos relógios, em S? Não deveriam, os observadores de $\tilde{S}$ achar que os nossos relógios, em S, adiantam?

Ao contrário, se nossa escolha tivesse recaído sobre $\tilde{S}$, então a dúvida seria: é coerente que os relógios de S atrasem e que, simultaneamente, os observadores de S achem que o atraso está nos relógios de $\tilde{S}$?

3. DRAMATIZAÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA (14)

Uma maneira didática de apresentar este problema é através de uma dramatização em dois quadros.

São considerados dois referenciais S e $\tilde{S}$, e toda a análise feita do ponto de vista de S, entendendo-se com isto que é ele que fixa a simultaneidade dos eventos em cada quadro.

$\tilde{S}$ está em movimento com a velocidade $\vec{v} = v\hat{i}$ em relação a S. São fixados quatro relógios, dois solidários com S e dois solidários com $\tilde{S}$.

Os relógios solidários com S se encontram em O, origem do sistema S, e em A, a uma distância L da origem e no sentido positivo do eixo $\hat{x}$ (Fig. 1).

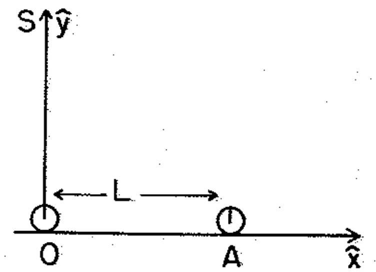


FIG. 1

O professor desempenhará o papel do relógio A e um aluno o do relógio O.

Os relógios solidários com $\tilde{S}$ se encontram em $\tilde{O}$, origem do sistema e em $\tilde{B}$, a uma distância L (medida com as réguas de S) da origem e no sentido negativo do eixo $\tilde{x}$ (Fig. 2). As origens dos dois sistemas são sincronizadas no instante $t_O=0$.

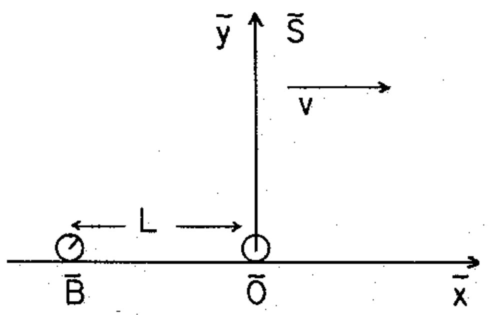


FIG. 2

Dois alunos representarão o papel dos dois relógios $\tilde{O}$ e $\tilde{B}$.

Primeira Cena

A configuração é dada pela Fig. 3.

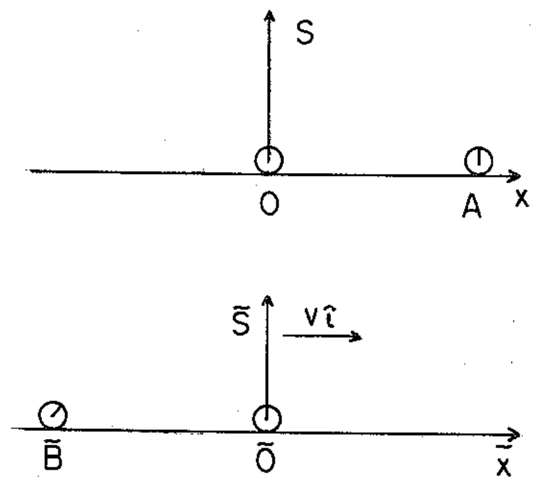


FIG. 3

O professor pergunta para O:

P: Quanto marca o seu relógio?

O: $t_O = 0$.

P: Você saberia dizer quanto marca o meu?

O: $t_A = 0$, pois os nossos relógios estão sincronizados.

P: E o relógio de $\tilde{O}$?

O: $\tilde{t}_{\tilde{O}} = 0$, pois estamos na configuração padrão na qual as origens dos dois sistemas estão sincronizadas.

Segunda Cena

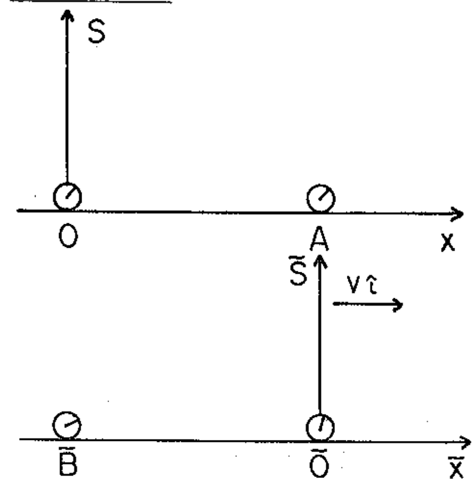


FIG. 4

O referencial $\tilde{S}$ se desloca até $\tilde{O}$ coincidir com A e, evidentemente, $\tilde{B}$ coincidir com O (Fig.4).

O professor pergunta para O:

P: Quanto marca o seu relógio? E o meu?

O: $t_O' = \frac{L}{V}$: é o tempo que demorou $\tilde{O}$ para chegar até A;

$t'_A = \frac{L}{V}$: pela mesma razão anterior.

O professor pergunta para $\tilde{O}$:

P: Quanto marca o seu relógio ao cruzar com A?

$\tilde{O}$: O meu relógio marca $t_{\tilde{O}} = \frac{L}{V}\sqrt{1-v^2/c^2}$: é fácil verificar isso pelo fato de que a distância OA medida com a minha régua é $L\sqrt{1-v^2/c^2}$.

O professor pergunta para $\tilde{B}$:

P: Quanto marca o seu relógio ao cruzar com O?

$\tilde{B}$: O meu relógio marca $\tilde{t}'_{\tilde{B}} = \frac{L}{V} / \sqrt{1-v^2/c^2}$: é fácil ver isso a partir do fato de que quando o meu relógio marcava $\tilde{t}_{\tilde{B}} = 0$, $\tilde{B}$ distava de O

$$L / \sqrt{1-v^2/c^2} \ .$$

O professor pergunta novamente para O:

P: Você concorda com as afirmações de $\tilde{O}$ e $\tilde{B}$?

O: Concordo plenamente com os tempos que eles deram como medidos por eles nos encontros respectivamente com A e com O: estas medidas estão de acordo com as transformações de Lorentz:

$$\tilde{t} = \left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) / \sqrt{1-v^2/c^2}$$

No caso de $\tilde{B}$ temos $t = \frac{L}{V}$ e $x = 0$ portanto

$$\tilde{t}_{\tilde{B}} = \frac{L}{V} / \sqrt{1-v^2/c^2} \ .$$

No entanto, em relação as justificativas dadas por $\tilde{O}$ e $\tilde{B}$, é preciso salientar que se trata de distâncias medidas com a régua deles e com a maneira deles de medir, que são diferentes das nossas.

P: O que você pode concluir em relação ao intervalo de tempo entre a cena 1 e a cena 2?

O: Que no relógio $\tilde{O}$ o tempo marcado foi inferior ao nosso; é o

efeito da dilatação do tempo, devido ao movimento de $\tilde{O}$.

O professor pergunta para $\tilde{B}$:

P: Qual foi o intervalo de tempo entre o cruzamento $O\tilde{O}$ e o cruzamento $O\tilde{B}$?

$\tilde{B}$: Partindo do pressuposto de que os nossos relógios estão sincronizados, então o intervalo é dado pela diferença $\tilde{t}'_{\tilde{B}} - \tilde{t}_{\tilde{O}} = \frac{L}{V} / \sqrt{1-v^2/c^2}$: isso significa que os relógios de S andam mais devagar, pois marcaram $\frac{L}{V}$ para o mesmo intervalo.

O professor volta a perguntar para O:

P: Como é possível o que acabou de falar $\tilde{B}$, se há pouco tempo vimos que o relógio de $\tilde{O}$ estava atrasando?

O: <u>O problema está na sincronização dos relógios de $\tilde{S}$</u>. $\tilde{O}$ e $\tilde{B}$ andam defasados sistematicamente. De fato na segunda cena tínhamos: $\tilde{t}'_{\tilde{B}} = \frac{L}{V} / \sqrt{1-v^2/c^2}$ e $\tilde{t}'_{\tilde{O}} = \frac{L}{V}\sqrt{1-v^2/c^2}$: isso dá uma defasagem $\Delta = \frac{L}{c^2} v / \sqrt{1-v^2/c^2}$. Na primeira cena tínhamos que o relógio $\tilde{B}$, ao passar na frente de $x = -L$ (em $t = 0$), marcava $\tilde{t}_{\tilde{B}} = \frac{Lv}{c^2} / \sqrt{1-v^2/c^2}$, ao passo que o relógio de $\tilde{O}$ marcava $\tilde{t}_{\tilde{O}} = 0$. A defasagem ficou a mesma, então os dois relógios $\tilde{B}$ e $\tilde{O}$ andaram com o mesmo ritmo.

Então o quadro é completo.

Visto de S, realmente todos os relógios de $\tilde{S}$ atrasam, e além disso estão defasados de um intervalo que depende da distância entre eles, medida em S. <u>Esta defasagem, que opera em sentido contrário ao atraso, permite que os observadores em $\tilde{S}$</u>, que consideraram os seus relógios sincronizados (pois não estão conscientes das suas defasagens), <u>possam interpretar as medidas de tempo no sentido de apontar para um atraso nos relógios do referencial S</u>.

Naturalmente, se, ao invés de escolher S como refe rencial da análise, tivéssemos escolhido $\tilde{S}$ e, por exemplo, mantido como eventos característicos das duas cenas os encontros $O\tilde{O}$ e $\tilde{O}A$, então a distância OA, medida em $\tilde{S}$ seria $L\sqrt{1-v^2/c^2}$, e o encontro $\tilde{O}A$ seria simultâneo não com $O\tilde{B}$ como apareceu anteriormente, mas com o encontro $O\tilde{C}$, sendo $\tilde{C}$ um relógio distante $L\sqrt{1-v^2/c^2}$ de $\tilde{O}$, medido em $\tilde{S}$ no sentido negativo do eixo $\tilde{x}$.

As consequências dessa nova análise seriam a defasagem dos relógios de S, seu atraso sistemático e sua interpretação, baseada na não consciência da defasagem, de que os relógios de $\tilde{S}$ estariam atrasando.

Uma dramatização análoga pode ser desenvolvida em relação as medidas de comprimento, cujo tratamento pode ser efetuado, seja utilizando o tempo marcado pelos relógios junto com a velocidade relativa, seja através da medida direta mediante réguas. Neste último caso, a pergunta, escolhido S como referencial de análise seria: como é possível que as réguas de $\tilde{S}$, que são mais curtas do que as de S, quando vão medir o tamanho destas últimas as encontrem menores? E a resposta teria como elementos fundamentais a contração das réguas de $\tilde{S}$, a maneira de medir réguas em movimento a partir de marcas simultâneas no referencial que mede e a defasagem dos relógios de $\tilde{S}$.

E esta última defasagem seria finalmente a responsável pela "aparente" contração das réguas de S quando medidas por $\tilde{S}$. E vice-versa, se o referencial escolhido fosse $\tilde{S}$.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esclarecido o problema da reciprocidade das consequências das transformações de Lorentz, tentaremos concluir nosso trabalho com algumas considerações a mais acerca da "realidade" destes efeitos. Afinal, dentro da Teoria da Relatividade Restrita, o que é "real"? Reais são as diferenças nas medidas de tempo e de comprimento, real é a sincronização dos relógios em cada referencial que exclue uma interpretação única. Reais e únicos são os eventos e, quando distantes, parcialmente distintos.

É real também a existência de grandezas que são iguais em todos os referenciais: uma delas é a velocidade da luz, uma outra é o intervalo espaço-temporal entre eventos.

Essas grandezas são absolutas; ao contrário, intervalos temporais e distâncias espaciais são relativas, no sentido que dependem do referencial no qual são medidos.

Uma analogia que pode ajudar a esclarecer este problema da relatividade dos intervalos espaciais e temporais é a das projeções de um vetor em dois sistemas de referência iguais com eixos $x_1 0 x_2$ e $\tilde{x}_1 0 \tilde{x}_2$ (Fig. 5) rodados um em relação ao outro de um ângulo θ. Nesta representação temos 3 tipos de

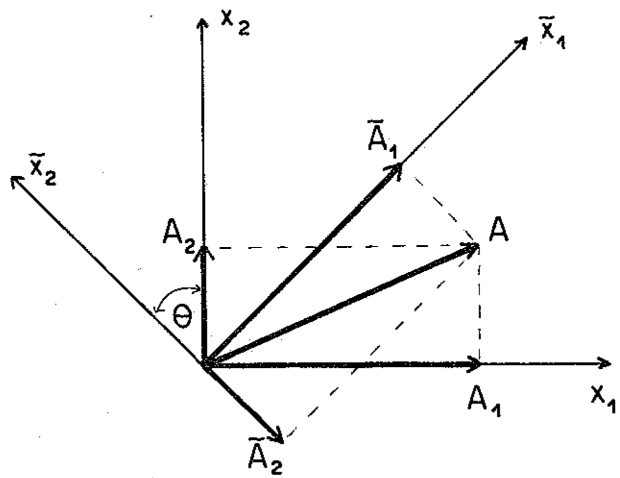


FIG. 5

grandezas. Em primeiro lugar temos o vetor $\vec{OA}$, único, com um módulo bem definido e igual em todos os referenciais. O seu correspondente na teoria da Relatividade é o intervalo invariante espaço-temporal entre eventos.

Em segundo lugar temos as projeções do vetor nos dois sistemas de eixos. São elas, por exemplo, OA_1 e $O\tilde{A}_1$ (Fig. 5). Também as projeções são definidas, únicas em cada referencial, no entanto diferem ao passar de um referencial para outro. O correspondente na teoria da Relatividade são as distâncias espaciais e os intervalos temporais entre eventos nos dois referenciais. Eles são bem definidos e não admitem ambigüidades.

Em terceiro lugar temos as projeções das projeções: cada uma das projeções do vetor OA no sistema $x_1 0 x_2$ pode ser projetada no sistema $\tilde{x}_1 0 \tilde{x}_2$ e vice-versa para as projeções deste último sistema. São elas, por exemplo, OA_1^* e $O\tilde{A}_1^*$ (fig. 6).

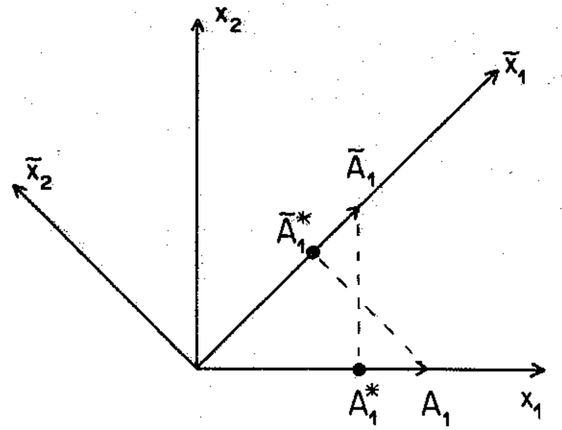


FIG. 6

É nesse nível que podem acontecer coisas esquisitas como por exemplo, que cada sistema veja as projeções do outro sistematicamente menores do que as suas. É simples constatar na

fig. 6 que a projeção OA_1 é maior do que a projeção da projeção OA_1^* e analogamente $O\tilde{A}_1 > O\tilde{A}_1^*$.

O análogo correspondente na Teoria da Relatividade é a comparação e a reciprocidade da dilatação do tempo e da contração das distâncias. De alguma forma, ao escolher um determinado referencial para comparar as medidas de tempo e de comprimento, se opera o confronto entre projeções de primeira ordem e projeções de projeções.

No caso visto anteriormente no ítem 2, no qual tudo era analisado tendo S como referencial privilegiado, as medidas de tempo dos relógios de S forneceram os intervalos <u>temporais</u> de S (projeções de primeira ordem), mas as medidas de tempo dos relógios de $\tilde{S}$ forneciam a <u>interpretação em S dos intervalos temporais de $\tilde{S}$</u> (projeções de projeções). De fato esta interpretação implicava que os relógios de S estavam sincronizados e os de $\tilde{S}$ defasados.

É neste nível interpretativo que se insere uma outra polêmica entre a teoria da Relatividade e as teorias neo-lorentzianas que também utilizam as transformações de Lorentz.

Na teoria da Relatividade, cada referencial tem o direito de considerar sincronizados seus relógios e defasados os relógios dos outros.

Na teoria de Lorentz[15] e nas teorias neo-lorentzianas[16] existe um referencial privilegiado, absoluto, o do éter; neste referencial "realmente" a velocidade da luz é constante em todas as direções, e a sincronização dos relógios adequada. Nestas teorias quando um corpo se movimenta em relação ao éter ele "realmente" se contrai, e ao diminuir sua velocidade até retomar o repouso em relação ao éter ele se dilata até voltar as condições "normais". O mesmo acontece com os relógios que diminuem seu ritmo de marcha ao se movimentarem. O fato de aparecer o contrário para os outros referenciais é um fenômeno "aparente" e é devido às distorções dos instrumentos de medida destes referenciais. Nessa briga de interpretação será possível, com o refinamento dos experimentos, escolher a mais adequada? É nossa impressão que nas medidas físicas existe algo de arbitrário, que não poderá ser eliminado e que dará margem a uma ou outra interpretação. Todo o núcleo da arbitrariedade está na fixação da velocidade da luz. Ela não pode ser determinada sem assumir uma série de hipóteses a priori, que implicitamente determinam seu valor. Isso porque para fixar um padrão de velocidade é necessário ter padrões de distância, de tempo e relógios distantes sincronizados. E para ter relógios distantes sincronizados é preciso ter um padrão absoluto de velocidade. Nesse círculo, pode-se começar de qualquer ponto de partida.

Para Einstein o ponto de partida foi a velocidade da luz no vácuo como padrão absoluto de velocidade em qualquer referencial. Como consequência vieram a contração das distâncias e a dilatação do tempo ao passar de um referencial para outro. Mas essa não era a única possibilidade. Lorentz partiu da dilatação do tempo e da contração das distâncias ao passar do éter para qualquer referencial e como consequência obteve que a velocidade da luz, medida com instrumentos deformados era igual em todos os referenciais.

Estas últimas considerações são importantes para focalizar de maneira mais adequada as possíveis dúvidas dos alunos em relação à reciprocidade dos efeitos de contração das distâncias e dilatação dos intervalos temporais. Provavelmente a interpretação de Lorentz e seus seguidores modernos é mais facilmente acessível aos alunos. Talvez isso seja uma indicação para explorar suas interpretações seja como passo inicial no entendimento das consequências das transformações de Lorentz, seja como contraposição iluminativa da interpretação Einsteiniana.

Na nossa opinião é somente depois de passar por uma discussão, as vezes prolongada, dessa problemática que é válido e significativo introduzir a geometrização da teoria da Relatividade operada por Minkowski(17). Com a introdução das linhas de universo que caracterizam o movimento de um objeto e com a focalização de seu comprimento invariante(18), retoma-se uma visão, por assim dizer, "acima" dos referenciais, no reino das medidas absolutas.

Essa visão torna-se mais concreta quando se identifica o comprimento invariante da linha do universo de um objeto físico, com o tempo medido por um relógio solidário com ele. Dessa maneira não somente esvanecem os "paradoxos" relativísticos, mesmo os mais complexos como os dos "gêmeos", mas também efeitos temporais relativísticos podem ser diretamente comparados. É o caso dos relógios voadores(19) ou das amostras de bacterias nas ultracentrífugas, experimentos nos quais a dilatação do tempo assume uma evidência fora de qualquer dúvida.

Na nossa opinião a sequência por nós proposta (debate sobre dilatação, introdução da geometria do espaço-tempo) tem o mérito de não sufocar as dúvidas legítimas dos alunos através do "despejo" de um formalismo desarvorado da problemática dos próprios alunos.

REFERÊNCIAS

(1) Uma apresentação sintética do esforço didático feito no mundo inteiro para tornar mais acessível e mais clara a Teoria da Relatividade pode ser encontrada em G. Cortini, "Vedute recenti sull'insegnamento della relatività ristreta ad un livello elementare", Quad. Giorn. Fis. 2 (1977) 13-69.

(2) G. Holton, "On the Origins of the Special Theory of Relativity", Am. Jour. of Phys. 28(7) (1960) 627-636.

(3) W. Brouwer: "Einstein and Lorentz: The Structure of a Scientific Revolution", Am. Journ. of Phys. 48(6) (1980) 425-431.

(4) V. também, para uma publicação em língua portuguesa: A. Villani, "O confronto Lorentz-Einstein e suas interpretações: I. A Revolução Einsteiniana", Rev. de Ensino de Física 3(1) (1981) 31-45.

(5) Além das referências encontradas em (1), existe uma interessante publicação em português, (J.A. Angotti, I.L. Caldas, M. Pernambuco, D. Delizaicov Neto, E. Rudinger, "Relatividade Especial - Módulo para Ciclo Básico". Publ. IFUSP 1980) que dá particular ênfase à discussão dos paradoxos.

(6) Vários textos enfrentam o problema da relação entre Relatividade e "Realidade Física". Entre eles podemos citar os tradicionais; Resnick, Rosser, Taylor e Wheeler, e também o não-tradicional L. Janossy ("Theory of Relativity based on Physical Reality", Akad, Kiedã - Budapest, 1971).

(7) O efeito da dilatação do tempo pode ser assim apresentado: dados dois eventos (por exemplo, o nascimento e o decaimento de uma partícula) o intervalo temporal entre eles é o mínimo possível no sistema de referência inercial no qual os eventos se realizam no mesmo lugar. No exemplo citado este referencial seria o próprio referencial da partícula, supondo que ela não seja acelerada.

(8) O efeito da contração das distâncias pode ser assim apresentado: dada uma régua, o seu comprimento será máximo se for medido num referencial em repouso em relação a ela.

(9) As transformações de Lorentz são as transformações das coordenadas espaço-temporais de um evento ao se passar de um referencial inercial S para um outro referencial inercial $\tilde{S}$ que anda com a velocidade $\vec{v}$ constante em relação a S. No caso da velocidade $\vec{v}$ ser na direção $\hat{\imath}$ as transformações são:

$$\tilde{x} = (x - vt) \,/\, \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$\tilde{t} = \left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \,/\, \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$\tilde{y} = y$$

$$\tilde{z} = z$$

(10) Existem várias deduções das transformações de Lorentz, algumas mais complexas, outras mais intuitivas, outras mais simples. Na nossa opinião uma das mais facilmente inteligíveis está descrita em G. Segre, "Un'Introduzione Moderna alla Relatività Ristretta: il "K-Calculus" di Bondi", Giorn. di Fisica 18 (1977) 132-144.

(11) O efeito da defasagem pode ser assim apresentado: eventos simultâneos num referencial não são mais simultâneos quando analisado em um outro referencial em movimento retilíneo em relação ao primeiro.

(12) Para visualizar o efeito da dilatação do tempo é muito famoso o exemplo do relógio de luz apresentado por Feynman. Uma experiência muito conhecida é a apresentada por Bertozzi no filme "Dilatação do tempo" do PSSC. A contração das distâncias é enfrentada de forma concreta por ex. em J.Walters,

"Time-Dilatation and the Lorentz Contraction", The Physics Teacher 20(1) (1982) 42-44.

(13) Vários trabalhos, baseados em entrevistas com alunos após terem sido submetidos a um curso introdutório sobre Teoria da Relatividade, tem chegado a essa mesma conclusão.

J.A. Angotti et al, "Teaching Relativity with a Different Phylosophy", Am. Jour. of Phys. 46 (1978) 1258-62.

P. Hewson, "A Case Study of Conceptual Change in Special Relativity", Eur. Jour. Sc. Ed. 4 (1982) 61-78.

(14) Este problema da reciprocidade dos efeitos das transformações de Lorentz é discutida de forma análoga, comparando medidas de vários relógios em dois referenciais, na ref. (1) e em G. Cortini, "A Useful Device for Illustration the Lorentz Transformations", Am. Jour. of Phys. 40 (1972) 1079-1081, e também em W. Rindler, "Special Relativity", Oliver and Boyd - Edimb. 1971.

(15) A visão mais completa da teoria de Lorentz está em: H.A. Lorentz, "The Theory of Electrons", 2nd. Ed., Dover, New York, 1952. Uma apresentação resumida da evolução da teoria de Lorentz, em português, está em: A. Villani, "O Confronto Lorentz-Einstein e suas Interpretações. II. A Teoria de Lorentz e sua Consistência", Rev. Ens. de Física 3 (2) (1981) 55-76.

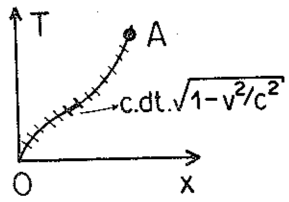
(16) Podemos encontrar uma discussão das teorias neo-Lorentzianas nos artigos:

H. Erlichson, "The Rod Contraction, Clock Retardation, Ether Theory and the Special Theory of Relativity", Am. Jour. of Phys. 41 (1973) 1068-1077;

V. Buonomano, "A New Interpretation of the Special Theory of Relativity", Int. Jour. of Theor. Phys. 13 (1975) 213-226.

(17) H. Minkowski, "Espaço e Tempo". Está em AA.VV., "O Princípio da Relatividade", Fund. Calans. Gulbekian, Coimbra, 1971.

(18) Uma linha do universo é uma linha que no diagrama espaço-temporal de Minkowski representa o movimento de uma partícula; cada ponto dessa linha representa a localização espacial e temporal da partícula. O comprimento invariante é calculado mediante a integral:



$$OA = c \int_0^{t_A} dt \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad .$$

(19) J.C. Hafele, R.C. Keating, "Around the World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains", Science 177 (1971) 166-168.

J.C. Hafele, R.E. Keating, "Around the World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains", Science 177 (1972) 168-170.