IFUSP/P 492
B.I.F. - USP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA
CAIXA POSTAL 20516
01498 - SÃO PAULO - SP
BRASIL

# PUBLICAÇÕES

IFUSP/P-492

INSTITUTO DE FÍSICA
BIBLIOTECA CENTRAL
F.I. USP

## UMA HIPÓTESE GENTILIÔNICA PARA AS CORES DOS QUARKS

M. Cattani e N.C. Fernandes
Instituto de Física, Universidade de São Paulo

Outubro/1984

# UMA HIPÓTESE GENTILIÔNICA PARA AS CORES DOS QUARKS

M. Cattani e N.C. Fernandes

Instituto de Física da Universidade de São Paulo,
C.P. 20.516, São Paulo, Brasil

## RESUMO

Estendendo o teorema de Noether conseguimos identificar os números quânticos de cor com o autovalor de um invariante da álgebra de $S^{(3)}$. Na aproximação gentiliônica, a composição do $S^{(3)}$ colorido com o modelo de quarks simétrico parece constituir uma simetria exata da natureza. Abordamos também algumas propriedades gerais relacionadas com a observacionalidade em Mecânica Quântica e afirmamos a universalidade da Estatística de Gentile.



## 1. INTRODUÇÃO

Dentro do esquema da mecânica quântica e de acordo com o Princípio da Indistinguibilidade, um outro tipo de partículas poderia existir na natureza(1). Elas foram denominadas de "gentíleons" para fazer uma nítida distinção dos usuais bósons e férmions. Assim, a possibilidade de existência de três tipos de partículas engloba as quantizações fundamentais encontradas na mecânica quântica. Elas estão relacionadas às representações do grupo simétrico em termos dos diagramas de Young. Bósons e férmions correspondem, respectivamente, às formas horizontal e vertical, ao passo que as formas intermediárias estariam associadas aos gentíleons. Aos bósons e férmions estariam associadas funções de ondas unidimensionais e aos gentíleons funções multidimensionais. Mostramos também que os gentíleons podiam ser interpretados como "entidades confinadas" com propriedades de saturação. Devemos salientar que estas características não são "físicas", mas elas têm suas origens nos aspectos geométricos e topológicos do grupo simétrico. O confinamento físico, que está relacionado às dimensões físicas do sistema, deve ser consequência das propriedades dinâmicas das partículas. Poderíamos esperar que este confinamento estivesse relacionado com o geométrico, mas, neste trabalho, não faremos nenhuma tentativa para verificar essa possível conexão.

Neste artigo, na Secção 2, nós interpretamos os invariantes da álgebra do grupo simétrico em termos do teorema de Noether. Alguns resultados físicos importantes tais como o aparecimento de novos números quânticos conservados surgem dessa análise.

Na Secção 3, assumindo um modelo gentiliônico para os quarks, nós mostramos que as cargas e o espectro de massa dos bárions adquirem explicações convincentes se o número quântico associado ao invariante algébrico obtido na Secção 2 for identificado com o número quântico de cor. Uma breve discussão sobre a constituição dos mésons também é feita.

## 2. O TEOREMA DE NOETHER E A ÁLGEBRA DO $S^{(3)}$

Todas as propriedades de simetria de um sistema podem ser descritas por meio de grupos de automorfismos que transformam o sistema nele mesmo. Segundo o teorema de Noether, se um sistema é invariante por um certo grupo de transformações então, desta propriedade de simetria resulta a conservação de uma grandeza física do referido sistema. Entretanto, em mecânica quântica nós não estamos restritos a grupos contínuos de simetria ou a grupos que envolvem transformações de coordenadas. De fato, o grupo fundamental em questão envolvido no Princípio da Indistinguibilidade é o grupo simétrico $S^{(N)}$ que não parece estar relacionado diretamente às simetrias do espaço tempo. Por isso colocamos o teorema de Noether na seguinte forma[2]: "associado com cada princípio de simetria existe um operador unitário U no espaço de Hilbert relacionando vetores de estado e observáveis em dois pontos físicos diferentes".

Para tornar essa afirmação mais precisa nós desenvolveremos um método algébrico relacionado ao $S^{(3)}$. Denominemos de $AS^{(3)}$ a álgebra[3] do grupo simétrico $S^{(3)}$. Ela é gerada por seis vetores $\{\eta_i\}$, $i = 1,2,\ldots,6$. Nesta álgebra nós definimos um operador de classe $K_{(\rho)}$ como sendo a soma das $n_{(\rho)}$ permutações com a estrutura cíclica $(\rho)$ :



$$K_{(\rho)} = \sum_{P_a \in (\rho)} P_a \qquad (1)$$

onde cada $P_a$ corresponde a um vetor $\eta_a$. Como é bem sabido, os operadores de classe formam um conjunto maximal linearmente independente de elementos de $AS^{(3)}$ tal que

$$\left[\eta , K_{(\rho)}\right] = 0 \quad \text{com} \quad \eta \in AS^{(3)} \quad . \qquad (2)$$

No nosso caso (N=3), os operadores de classe são $K_{(1^3)} = I$, $K_{(2,1)} = \sum (ij)$ e $K_{(3)} = \sum (ijk)$, onde cada operador do grupo está indicado com a notação usual da análise substitucional. Agora, como o grupo $S^{(3)}$ admite dois geradores a e b, nós podemos considerar $AS^{(3)}$ como sendo uma álgebra polinomial associativa gerada por a e b: $\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_6\} = \{I, ba, ab, a, aba, b\}$. Chamando de L(a,b) esta última álgebra, é fácil vermos que a ela corresponde a seguinte relação de comutação:

$$ab + ba = -I \quad . \qquad (3)$$

Não é difícil de se mostrar que L(a,b) contém somente o idempotente primitivo definido pela Eq. (3) e que a relação de fechamento (3) também engloba todas as relações (1).

Essas definições de $AS^{(3)}$ and L(a,b) em termos de a e b refletem também o fato de que qualquer permutação pode ser obtida através de transposições. Então, em nosso formalismo algébrico, um papel proeminente é atribuído à classe $(\rho) = (2,1)$. A esta classe (2,1) corresponde os invariantes algébricos $K^{[1^3]}_{(2,1)}$, $K^{[2,1]}_{(2,1)}$ e $K^{[3]}_{(2,1)}$ cujos autovalores são dados, respectivamente, por −3,0 e 3. O colchete superior corresponde às três representações: $[1^3]$ = fermiônica, [2,1] = gentiliônica e [3] = bo sônica. É importante notarmos que a simetria 4-dimensional das funções de onda que descrevem os estados gentiliônicos corresponde a uma representação $2 \times 2$ de $AS^{(3)}$ com as matrizes representativas tomadas como somas de Kronecker pois $(S^{(3)})^2 \sim S^{(3)}$.

Usualmente, para grupos contínuos, nós definimos os invariantes de Casimir que comutam com todos os geradores do grupo e que são, por conseguinte, invariantes por todas as transformações do grupo. Estes invariantes simultaneamente diagonalizados são os operadores quânticos conservados associados ao grupo de simetria. Em nosso caso discreto adotamos a mesma idéia. O operador de classe $K^{[2,1]}_{(2,1)}$ que corresponde à genuína representação gentiliônica da $AS^{(3)}$ é identificado com o operador que dá um novo número quântico associado a $S^{(3)}$.

Nossa álgebra $L(a,b)$ é um caso especial de álgebra $G_n$ estudada há muitos anos atrás por Schönberg[4]. Ele mostrou que $G_n$ está associada a uma espécie de geometria afim do espaço de Hilbert. Uma álgebra afim de dimensão $\underline{n}$ contém, como uma sub-álgebra, uma álgebra unitária com a mesma dimensão. Deste ponto de vista, é de se esperar que uma estrutura afim mais rica nos permita inferir algumas propriedades mais gerais do que aquelas contidas em uma estrutura métrica unitária, como veremos na Secção 4.

## 3. OS QUARKS E AS CORES

No modelo simétrico de quarks para os bárions[5] onde somente a representação $(SU(6) \times O(3))_{\text{simétrica}} = \phi$ existe, a restrição de que as funções de onda $\phi$ sejam totalmente simétricas implica na introdução "ad hoc", para cada quark, de três no-



vos graus de liberdade, denominados de "cores". Nós tentamos explicar o espectro de massa bariônico com um modelo gentiliônico sem cores. Isto é, nós assumimos que os bárions poderiam ser descritos por uma função de onda 4-dimensional definida somente no espaço $SU(6) \times O(3)$ e utilizamos o procedimento padrão de cálculo adotado no modelo $SU(6) \times O(3)$ [5]. Como em nossos cálculos, a função de onda de $SU(6) \times O(3)$ obtida é igual a $\phi$, nossa tentativa falhou devido às dificuldades de simetria encontradas na construção dos vetores de estado. Isto nos levou a formular o seguinte modelo.

Consideramos a ação do $S^{(3)}$ no espaço de cores $(R,B,Y)$ e escrevemos o vetor de estado 4-dimensional $\psi$ para um bárion como:

$$\psi = \phi \times Y(\text{cor}) \quad , \tag{4}$$

onde $\phi$ é unidimensional e a função 4-dimensional $Y(\text{cor})$ corresponde à representação intermediária do $S^{(3)}$. Como os modelos gentiliônico e fermiônico têm a mesma função $\phi$ para quarks sem cores, eles dão resultados idênticos quando assumimos que os processos físicos não dependem das cores.

O invariante algébrico $K^{[2,1]}_{(2,1)}$ da Secção 2, associado aos gentíleons é, usando o teorema de Noether, interpretado como um operador unitário e considerado como o "operador de cor". Desse modo, o número quântico de cor conservado, que surge como uma consequência intrínseca do estudo da $AS^{(3)}$ será o autovalor do operador $K^{[2,1]}_{(2,1)}$. Ora, é fácil mostrar que esse autovalor é igual a zero[3]. Como vemos a seguir, este resultado não é fortuito.

A relação de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = T_3 + Y/2 = F_3 + F_8/\sqrt{3} \qquad (5)$$

define o operador de carga como uma função dos geradores do SU(3) [5]. Esta relação pode ser generalizada do seguinte modo

$$Q = (T_3 + Y/2) + t/3 \qquad (6)$$

onde <u>t</u> é tomado como um número de cor arbitrário que em nosso formalismo é considerado como sendo o autovalor de $K^{[2,1]}_{(2,1)}$. Esta hipótese é consistente com a definição de um tripleto de cargas obedecendo a

$$z = (t + 2)/3 \qquad (7)$$

submetida ao vínculo

$$z_R + z_B + z_Y = 2 \qquad (8)$$

que é requerido para explicar a carga +2 do $\Delta^{++}(u_R u_B u_Y)$. Assim, o vínculo dado pela Eq. (8) corresponde a

$$t_R + t_B + t_Y = 0 \qquad (9)$$

assegurando que as cargas dos bárions são explicadas através da relação de Gell-Mann-Nishijima. A expressão (9), que é imposta pelos resultados experimentais, aparece como um resultado natural na teoria gentiliônica: ele é exatamente o autovalor de $K^{[2,1]}_{(2,1)}$ obtido da $AS^{(3)}$.

Devemos notar que a Eq. (9) foi deduzida para três quarks em diferentes estados de cor. Como Y(cor) também admite que duas partículas podem ocupar o mesmo estado de cor, uma condição adicional aparece em nosso esquema:



$$2\,t_n + t_m = 0 \qquad (10)$$

onde $m \neq n$ e $m,n = R, B$ e $Y$. Então, de acordo com as Eqs. (9) e (10) nós podemos concluir que $t_R = t_B = t_Y = 0$, sugerindo que a combinação de um $S^{(3)}$ "colorido" com o modelo simétrico SU(6) × 0(3) resulta uma simetria exata da natureza.

Nossa teoria difere consideravelmente da descrição quântica unidimensional. Com a identificação de uma nova quantidade física conservada, surge o problema de encontrar o correspondente princípio de invariância. Para as transformações contínuas definimos um operador Hermitiano como o gerador da simetria. Aqui, para as transformações discretas o uso extensivo dos invariantes da álgebra dos operadores foi feito. Lembramos ainda que, embora a função $\phi$ sendo a mesma nos formalismos unidimensional e 4-dimensional, a presença de Y(cor) é muito significativa pois sua 4-dimensionalidade e propriedades de simetria podem levar à explicação de: (a) conservação do número bariônico, (b) confinamento geométrico dos quarks, e (c) saturação de 3 quarks em bárions [1].

Finalmente, devemos notar que um aspecto muito peculiar da multi-dimensionalidade das funções de onda gentiliônicas passou desapercebido em nosso trabalho anterior [1]. É o seguinte. Como as funções de onda associadas aos gentíleons devem ser multi-dimensionais, <u>dois gentíleons</u> idênticos não podem formar um sistema, pois isto implicaria que o sistema seria representado por funções de onda uni-dimensionais. Portanto, apesar das teorias uni-dimensional e gentiliônica darem os mesmos resultados quando aplicadas aos mésons, o formalismo gentiliônico parece ser mais satisfatório no sentido de poder explicar porque os mésons são estados ligados de duas partículas diferentes: um quark e um anti-quark.

## 4. CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

O princípio de exclusão de Pauli desempenha um papel fundamental nas possíveis maneiras de definir observáveis em mecânica quântica. Ele é a mais importante lei que deve ser obedecida para que haja a estabilidade da matéria. A estatística definida por ele, a de Fermi-Dirac, quando aplicada à toda física quântica tem dado resultados inquestionáveis. Por outro lado, para partículas ou sistemas que não obedecem ao princípio de Pauli nós temos somente uma alternativa aceitável: a estatística de Bose-Einstein. Essas duas estatísticas preenchem os requisitos da mecânica quântica e de teorias mais elaboradas tais como a teoria quântica de campos. Entretanto, recentemente[1] nós propusemos a questão da universalidade de uma terceira espécie de estatística, a de Gentile. Ela também foi deduzida dos princípios gerais da mecânica quântica e não está em contradição com o Princípio da Indistinguibilidade. Porém, seu significado não é transparente como ocorre com as outras estatísticas. Uma dificuldade fundamental é concernente à observabilidade. Enquanto as estatísticas de Bose-Einstein e Fermi-Dirac têm sido amplamente confirmadas experimentalmente, levando a resultados bem estabelecidos, nenhuma reivindicação foi feita da necessidade de extensão dessas teorias para explicar os resultados experimentais. Mas a mecânica quântica tem suas próprias regras de seleção. Alguns processos não diretamente relacionados à observações experimentais são permitidos ou proibidos, de acordo com algumas regras quânticas. Nós esperamos que a estatística de Gentile provavelmente será de importância fundamental na formulação de regras de seleção. Isto foi mostrado em detalhes no presente artigo. O grupo simétrico $S^{(3)}$ não estando diretamente relacionado com simetrias do espaço tempo poderia levar a operadores não necessariamente relacionados a observáveis quânticas.



Há outro aspecto sobre a observabilidade que é importante mencionarmos. O método de segunda quantização desenvolvido por nós[1] é um caso particular da técnica geral matemática aplicada para um formalismo que consiste de equações lineares de evolução[6,7]. A dimensionalidade dos vetores de estado intermediários expressos em termos da linguagem de segunda quantização tem, para N=3, como resultado uma relação tri-linear de comutação para os operadores de criação e destruição. Por outro lado, tanto os operadores relativos a bósons ou férmions, como as expressões ligadas a observáveis, como energia e carga, são escritas como combinações bilineares de operadores de criação e destruição[8]. Assim, como espera-se que não apareça um operador de criação ou destruição sozinho em qualquer termo da Hamiltoniana, uma relação tri-linear de comutação possivelmente está relacionada com propriedades não observáveis. Entretanto, algumas regras de seleção podem resultar dessas relações tri-lineares.

As propriedades muito estranhas dos quarks podem ser satisfatoriamente explicadas se assumirmos que eles obedecem à estatística de Gentile. Os números quânticos de cor surgem como consequência de uma interpretação mais ampla do teorema de Noether aplicado ao sistema de 3 quarks, invariante por $S^{(3)}$. Acreditamos que as implicações teóricas, ao assumirmos válida a estatística de Gentile para sistemas coletivos não estejam restritas somente à explicação das simetrias do SU(6) ou do SU(3) e de seus multipletos. A ação de $S^{(3)}$ no espaço de cores considerado aqui é um exemplo do procedimento geral que é bem conhecido na teoria dos espaços internos[9]. O aparecimento de regras de seleção e leis de conservação em nosso esquema sugere que os campos de gauge e espaços internos sejam os mais promissores beneficiários do estudo da estatística geral. Este estudo coloca questões muito difíceis, porém fascinantes, que prometem ser um grande desafio para futuras pesquisas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos professores J. Tiomno, F.A. B. Coutinho e C.P. Malta por valiosas discussões. Um dos autores (M. Cattani, Prof. Pesquisador 1A do CNPq) agradece o auxílio financeiro do CNPq.



REFERÊNCIAS

(1) Cattani, M. e Fernandes, N.C., Nuovo Cim. 79A, 107 (1984).

(2) Melvin, M.A., Rev. Mod. Phys. 32, 477 (1960).

(3) Matsen, F.A., "Vector Spaces and Algebras", Holt, Rinehart and Winston, New York (1970).

(4) Schönberg, M., An. Acad. Bras. Ci. 28, 11 (1956) e Nuovo Cim. (Suppl.) 6, 356 (1957).

(5) Close, F.E., "An Introduction to Quarks and Partons", Academic Press, London (1979).

(6) Schönberg, M., Nuovo Cim. 10, 697 (1953).

(7) Paul, R., "Field Theoretical Methods in Chemical Physics", Elsevier, Scientific Publishing Co., Amsterdam (1982).

(8) Fermi, E., "Elementary Particles", Yale University Press, New Haven (1951).

(9) Fernandes, N.C. e Cattani, M., Rev. Bras. Fis., Volume Especial, 87 (Julho, 1984).