UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA
CAIXA POSTAL 20516
01498 - SÃO PAULO - SP
BRASIL

PUBLICAÇÕES

IFUSP/P-493

AS ÁLGEBRAS DE GRASSMANN-SCHÖNBERG E GRANDE UNIFICAÇÃO

Normando Celso Fernandes
Instituto de Física, Universidade de São Paulo

Outubro/1984

What God hath put asunder no man shall ever join

W. Pauli

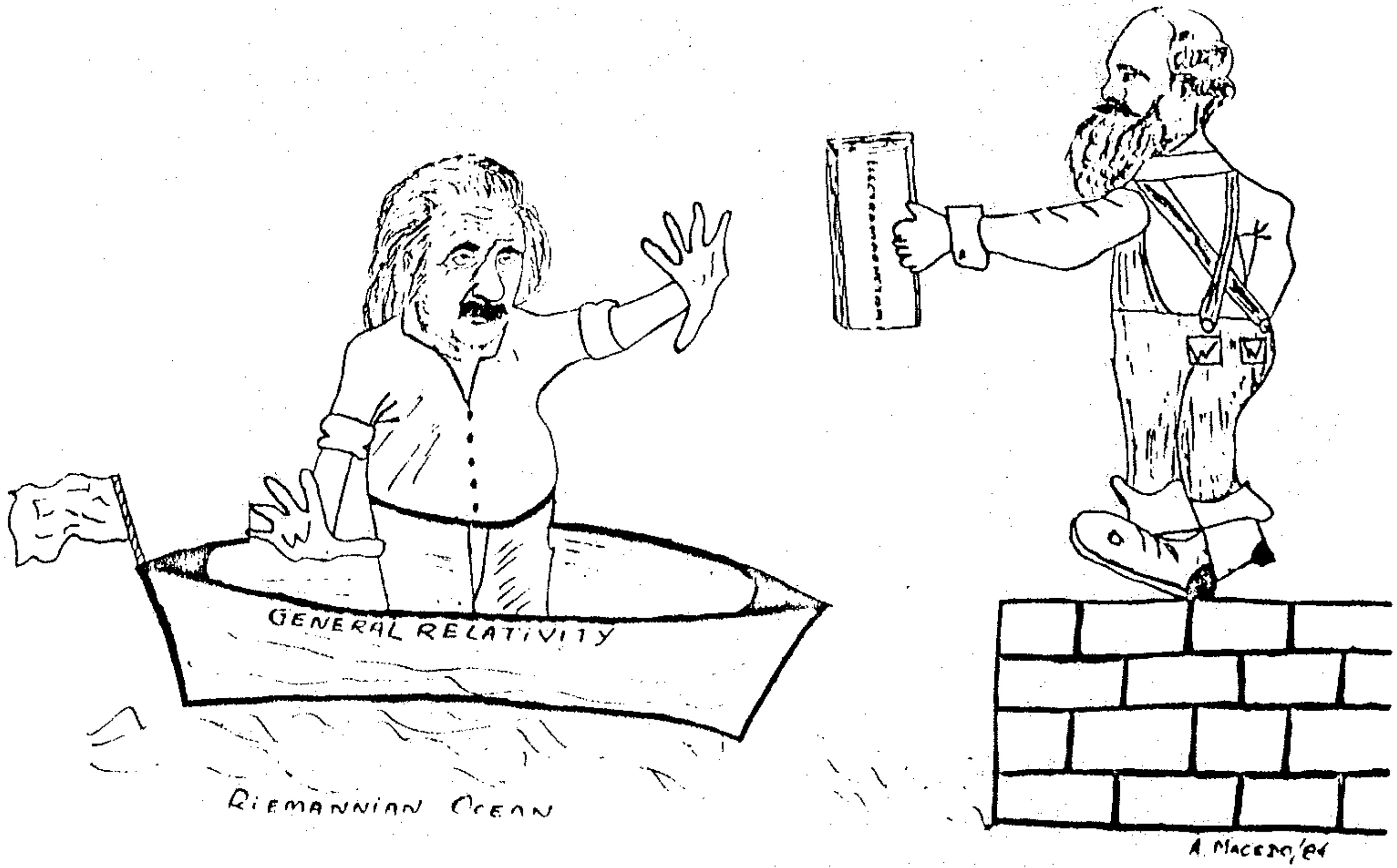

Ilustração de Armando Macedo (IFUSP)

AS ÁLGEBRAS DE GRASSMANN - SCHONBERG

E

GRANDE UNIFICAÇÃO

Normando Celso Fernandes
Instituto de Física - U S P
Caixa Postal 20516 - São Paulo
Brasil

"... um problema matemático não pode ser considerado como completamente esgotado enquanto ele não se tornar intuitivamente evidente .. "

Felix Klein em
" O Programa de Erlangen "
(1872)

AS ÁLGEBRAS DE GRASSMANN-SCHOENBERG E GRANDE UNIFICAÇÃO[+]

Normando Celso Fernandes
Instituto de Física - USP
Caixa Postal 20516 - São Paulo

1. INTRODUÇÃO - Em Física, a primeira teoria de unificação de alguns conceitos básicos dentro de um formalismo matemático conveniente talvez seja a Lei de Atração Universal de Newton. Lá, vemos a incorporação de efeitos mecânicos ocorrendo a nível de experiências do dia a dia como a gravidade, numa teoria muito geral que engloba aspectos da Mecânica Celeste. Mais tarde, Faraday propunha a idéia de campo e com isso, a possibilidade de explicar gravitação e eletromagnetismo como uma teoria global. Essas idéias iriam reaparecer mais tarde nas teorias de campos unificados de Einstein. O desejo de unificar, englobar, generalizar é uma constante do pensamento científico. Neste século, algumas teorias unificadas já mostraram o sucesso dessa atitude globalizante. Assim, a Mecânica Quântica conseguiu incorporar vários aspectos da Química Teórica, explicando de forma coerente a maioria dos problemas propostos por essa disciplina. A Física das Partículas Elementares também testemunhou um grande sucesso unificador por meio da Teoria de Glashow-Weinberg-Salam-Ward que forne-

---

[+] Resumo duma palestra apresentada durante o Simpósio de Física realizado de 28 a 31 de agosto de 1984 no IFUSP, São Paulo, em homenagem aos 70 anos de Mário Schönberg.

ce um esquema totalmente renormalizável incorporando as interações eletromagnéticas e fracas. A etapa seguinte seria a tentativa de incorporar num único grande formalismo as quatro interações básicas conhecidas : eletromagnetismo, interações fracas, interações fortes e gravitação. Dessas quatro, podemos dizer que as três primeiras já foram unificadas, constituindo o objeto duma teoria denominada de Supersimetria, da qual iremos expor alguns aspectos no Capítulo 2. A quarta interação básica, a gravitação, ainda resiste às tentativas de incorporação, parecendo que ainda haverá a necessidade dum grande esforço teórico para se conseguir esse objetivo. Nosso intento aqui é propor algumas idéias genéricas para se tentar seguir como um roteiro de compreensão das dificuldades.

Neste trabalho pretendemos seguir uma linha inspirada numa série de artigos publicada na década de 50 por Mário Schönberg, que culminou com a publicação de sua monografia "Quantum Mechanics and Geometry " que, a nosso ver, representa o começo de uma visão algébrico-geométrica no sentido de unificar algumas teorias físicas e matemáticas.

Assim, no Capítulo 2 expomos as idéias básicas contidas nas teorias de Superespaço, de Superálgebras e de Supersimetria, realçando alguns aspectos que serão relevantes na formulação que iremos propor. A possibilidade de termos espaços planos com torção será levantada. Outros aspectos importantes não abordados por nós, deverão ser procurados na bibliografia sucinta que fornecemos no final.

No Capítulo 3 definimos as álgebras de Grassmann-Schönberg por meio de suas relações de comutação e de anti-comutação , procurando explicitar a profundidade da extensão proposta por Schönberg às álgebras de Grassmann, no sentido de interpretá-las fisicamente. Damos também uma idéia da teoria das representações dessas álgebras.

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo de possíveis estruturas de fibrados convenientes para a descrição dos aspectos geométricos e topológicos das álgebras definidas. Este Capítulo não deve ser entendido como uma formulação rigorosa da Teoria dos Fibrados e sim como uma sugestão de eventuais linhas de pesquisa a serem desenvolvidas posteriormente. Os problemas geométricos relacionados com o estudo das conexões e com a teoria do levantamento são dirigidos no sentido de fornecer uma idéia intuitiva das dificuldades encontradas quando se pretende encaixar a gravitação no esquema das Grandes Unificações.

O Capítulo 5 é um sumário de conclusões e sugestões algumas das quais estão sendo objeto de nossas reflexões atuais.

No final deste artigo fornecemos uma bibliografia sucinta de alguns tópicos abordados. Incluimos na lista somente algumas publicações que nos parecem pertinentes e pontos de vista muito importantes são totalmente omitidos nas referências.

2. SUPERSIMETRIA, SUPERESPAÇO E SUPERÁLGEBRAS - O espaço tempo usual é definido como sendo o " left coset " do quociente

$$\text{Grupo de Poincaré (GP) / Grupo de Lorentz (GL)} = \frac{\exp i\,(\,x^{\mu}\,p_{\mu} + \omega^{\mu\nu}\,M_{\mu\nu}\,)}{\exp i\,(\,\omega^{\mu\nu}\,M_{\mu\nu}\,)} \qquad (1)$$

que é parametrizado por 4 números reais. Como (GP) e (GL) são métricos, (1) também é um espaço métrico. Essa definição pode ser generalizada : podemos construir diversas extensões do espaço tempo (Superespaços) definindo quocientes de Grupos Estendidos (GE) / (GL). Essa escolha assegura que, ao menos localmente, o espaço resultante é dado por um produto cartesiano. Essa trivialidade local é necessária para que a invariância por Lorentz das leis físicas esteja assegurada. Também a gravitação pode estar presente se (GL) for um subgrupo normal de (GE). Dessa maneira, os superespaços ficam munidos duma estrutura de grupo.

Dependendo da estrutura de superespaço escolhida, pode existir uma simetria que, dentro do quadro da teoria quântica, pode relacionar campos bosônicos e fermiônicos. Esse novo princípio, chamado de Supersimetria, que unifica os dois constituintes da matéria, partículas e campos, que sempre foram bem diferenciados (especialmente em razão das suas estatísticas), foi encontrado pela primeira vez em 4 dimensões por Gel'fand e Likthman, numa extensão não trivial de (1). A característica principal da supersimetria é o aparecimento de supermultipletos contendo os dois tipos de campos. Entretanto, bósons e férmions com a mesma massa não são

encontrados na natureza. Esse fato fundamental indica que a supersimetria deve ser quebrada. Na verdade, essa quebra pode ser incorporada num esquema bastante amplo se adotamos uma estrutura geométrica bastante abrangente para o superespaço.

Um exemplo fundamental de superespaço pode ser construido adotando-se a seguinte definição para o quociente :

$$\frac{\exp i\,(\,\theta^{\alpha}\,Q_{\alpha} + x^{\mu}\,p_{\mu} + \omega^{\mu\nu}\,M_{\mu\nu}\,)}{\exp i\,(\,\omega^{\mu\nu}\,M_{\mu\nu}\,)} \qquad (2)$$

parametrizado por x^{μ} e por quatro variáveis de Grassmann anticomutativas adicionais definidas por

$$\left\{ \theta^{\alpha}, \theta^{\beta} \right\} = 0 \qquad (3)$$

Esse enriquecimento da estrutura do espaço tempo por meio da adição de uma estrutura algébrico-geométrica independente ao grupo de Poincaré foi proposta num sentido muito mais amplo por Schönberg na década de 50. Algumas consequências dessa proposta serão estudadas aqui.

A representação da álgebra definida por (2), que é um exemplo de superálgebra, é construída em termos de p-formas (Supercampos). O isomorfismo existente entre a álgebra definida por (3) e o cálculo diferencial foi notado pelo próprio Grassmann, mereceu especial atenção nos trabalhos de Schönberg e terá algumas implicações nas considerações que iremos desenvolver no Capítulo final.

O fato mais importante a ser deduzido das definições (2) e (3), segundo o ponto de vista adotado neste artigo, é o aparecimento explícito na relação de comutação da álgebra graduada dos geradores diferenciais da supersimetria

$$\{ D_\alpha , D_\beta \} = i (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} D_\mu \qquad (4)$$

da filtração que acarreta a existência de torção no superespaço mesmo quando uma métrica plana é introduzida. Esse aspecto geométrico fundamental do superespaço desempenhará um papel muito importante tanto na classificação duma possível estrutura fibrada, quanto na comparação entre teorias de gravitação.

Como dissemos no início deste Capítulo, se pretendemos encaixar a gravitação dentro da Grande Unificação, a teoria do superespaço deve fornecer os elementos para que a empreitada se torne possível. Usualmente consideramos a gravitação como a teoria do espaço tempo curvo. A idéia óbvia seria tentar fazer o mesmo com o superespaço. A supergravitação seria a teoria do superespaço curvo. Mas a relação (4) nos ensina que, ao contrário dos espaços de Riemann onde a geometria é determinada pela curvatura, a geometria do superespaço é determinada pela torção. A curvatura seria determinada a partir da torção por meio das identidades de Bianchi. Para N = 8 o número de componentes da torção seria exageradamente grande, o que complicaria muito o problema da solução do número de componentes dos supercampos. Esse problema bastante complicado não será abordado aqui. Do nosso ponto de vista, o que deve ser guardado em mente é a relação (4). A sugestão da classificação por meio da torção nos induz a refletir sobre a conveniência de se adotar para a gravitação ou uma teoria à la Einstein ou à la Cartan. ou à la Weyl.

3. AS ÁLGEBRAS DE GRASSMANN-SCHONBERG.- A idéia de generalização do espaço contida no trabalho de Grassmann tornou-se muito importante para a compreensão das propriedades e operações relacionadas com várias álgebras. Cada método de pesquisa sobre o mesmo tema - espaço e matéria - cria suas próprias aplicações. Entretanto seria um erro no desenvolvimento de um dos métodos somente copiar uma lista das proposições que ocorrem nos outros métodos e tentar prová-la com os recursos do método em questão. Entretanto, algumas proposiçõesgerais de cada método parecem manter suas validades se a finalidade é construir um cálculo abrangente relacionado com cada compartimento do pensamento físico . A nosso ver, esse era um dos objetivos de Schönberg quando há algumas décadas atrás ele propôs algumas extensões das álgebras de vetores de Grassmann. Quando as regras de manipulação de certos símbolos algébricos e geométricos são conhecidas, as teorias ligadas ā essas regras podem ser estudadas independentemente do significado intrínseco atribuido aos símbolos. Como um exemplo dessa afirmação podemos citar a formulação original de Dirac da Mecânica Quântica em termos dos operadores (q, p).

Vamos considerar uma variedade n-dimensional afim M. Grassmann definiu duas álgebras sobre ela : uma álgebra comutativa e uma anti-comutativa para os vetores contravariantes V de M. Esses elementos geométricos pertencem aos espaços tangentes $T_x(M)$ associados com cada ponto x de M. O espaço formado pelos $T_x(M)$ para todos os pontos x constitui o fibrado tangente T(M).

Schönberg estendeu essas álgebras ao fibrado cotangente $T^*(M)$ impondo também uma filtração sobre as estruturas de Grassmann com a definição de um invariante $\langle U, V \rangle$ relacionando os vetores contravariantes V com as 1 formas U (vetores covariantes). As álgebras resultantes são :

i) Uma álgebra associativa graduada anticomutativa G_n cujos geradores são os elementos (V) e (U) associados aos V e aos U obedecendo às regras de multiplicação

$$\left.\begin{aligned} (V)(V') + (V')(V) &= 0 \\ (U)(U') + (U')(U) &= 0 \\ (U)(V) + (V)(U) &= \langle U, V \rangle \, 1_{G_n} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

onde 1_{G_n} é a unidade de G_n .

ii) Uma álgebra associativa graduada comutativa L_n definida pelas regras de multiplicação para os geradores correspondentes

$$\left.\begin{aligned} \{V\}\{V'\} + \{V'\}\{V\} &= 0 \\ \{U\}\{U'\} + \{U'\}\{U\} &= 0 \\ \{U\}\{V\} + \{V\}\{U\} &= \langle U, V \rangle \, 1_{L_n} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

os símbolos tendo uma interpretação óbvia.

Uma base de G_n é definida pelos 2^{2n} elementos $(I_1)^{r_1} . (I_2)^{r_2} \ldots (I_n)^{r_n} . (I^n)^{s_n} \ldots (I^1)^{s_1}$ com os expoentes r, s assumindo valores 0 e 1. De modo análogo temos uma base de L_n : $\{I_1\}^{r_1} \ldots \{I_n\}^{r_n} . \{I^1\}^{s_1} \ldots . \{I^n\}^{s_n}$ com $r, s = 0, 1, 2, \ldots, \infty$. Assim, G_n é de ordem 2^{2n} enquanto L_n é de ordem infinita. Um elemento genérico Γ de G_n pode ser escrito como

$$\Gamma = \sum_{p,q}^{0,..,n} (p!\, q!)^{-1} C^{j_1 \ldots j_p}_{k_1 \ldots k_q} (I_{j_1}) \ldots (I_{j_p})(I^{k_q}) \ldots (I^{k_1})$$

Um elemento genérico Λ de L_n pode ser escrito como

$$\Lambda = \sum_{p,q}^{0,..\infty} (p!q!)^{-1} (a_1! \ldots a_n!)(b_1! \ldots b_n!) \, C^{j_1 \ldots j_p}_{k_1 \ldots k_q}$$

$$\times \{I_{j_1}\} \ldots \{I_{j_p}\} \{I^{k_1}\} \ldots \{I^{k_q}\}$$

Concluimos então que G_n é representada por tensores antisimétricos (p formas) enquanto que L_n é representada por tensores simétricos. Assim, G_n pode ser interpretada como um cálculo para objetos geométricos afins, o que generaliza a álgebra exterior. De modo análogo, L_n pode ser interpretada como um cálculo para objetos geométricos afins descritos por tensores simétricos.

Uma álgebra tensorial afim completa pode ser definida como $G_n \times L_n$ que passa a ser o conceito mais importante deste artigo. À essa álgebra, gerada pelos (I) e $\{I\}$, damos o nome de Grassmann-Schönberg. Ela satifaz às seguintes regras de multiplicação :

$$\begin{aligned} (I_j)(I_k) + (I_k)(I_j) &= 0 \\ (I^j)(I^k) + (I^k)(I^j) &= 0 \qquad (7) \\ (I^j)(I_k) + (I_k)(I^j) &= \delta^j_k \, 1_{G_n} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \{I_j\}\{I_k\} + \{I_k\}\{I_j\} &= 0 \\ \{I^j\}\{I^k\} - \{I^k\}\{I^j\} &= 0 \qquad (8) \\ \{I^j\}\{I_k\} - \{I_k\}\{I^j\} &= \delta^j_k \, 1_{L_n} \end{aligned}$$

com a unidade da álgebra resultante sendo definida por meio duma identificação entre 1_{G_n} e 1_{L_n} .

Neste ponto, após termos definido a estrutura das álgebras de Grassmann-Schönberg, podemos parar um pouco para traçarmos algumas linhas gerais de trabalho e apresentarmos algumas sugestões. Uma das intenções desta monografia é fornecer um formalismo algébrico a ser utilizado na teoria das Grandes Unificações. Em particular, uma das metas do estudo das supersimetrias é combinar geradores que comutam com geradores que anticomutam numa superálgebra. Se consideramos os objetos geométricos afins descritos pela álgebras produtos G_n X L_n como sendo constituidos por componentes de supercampos teremos, pelo menos no caso das supersimetrias, um esquema algébrico poderoso para atacar este aspecto das teorias unificadoras.

Schönberg demonstra que a álgebra afim G_n contém algumas álgebras métricas como subálgebras. Assim, se definimos G_n sobre o corpo dos reais, chegamos a uma subálgebra quociente isomorfa ã uma álgebra de Clifford C_n que, essencialmente é métrica. O fato de G_n conter subálgebras equivalentes a todas as álgebras de Clifford e às álgebras do tipo Duffin-Kemmer-Petiau mostra que dentro do cálculo afim a teoria dos espinores se torna uma parte da teoria dos tensores antisimétricos e que a separação existente entre o cálculo espinorial e o cálculo tensorial se deve em parte a uma lacuna interpretativa do cálculo convencional. Aliás, em nossa opinião, essa forma de abordar os dois tipos de cálculos ganha um reforço, embora num contexto muito diverso, nas conclusões dum trabalho recente de Göckeler e Joos (ver bibliografia) onde uma transformação tensorial é considerada como um produto duma transformação espinorial

por uma transformação do tipo SU(2) X SU(2). Podemos também generalizar o estudo para uma métrica não plana, chegando à definição das álgebras de Atiyah-Kähler caracterizadas pelo produto

$$dx^{\mu} \vee dx^{\nu} = g^{\mu\nu} + dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$$

onde $\vee$ denota o produto de Clifford e $\wedge$ denota o produto de Grassmann. Alguns resultados importantes têm sido obtidos dentro dessa ótica, especialmente no que se relaciona à definição de correntes bosônicas-fermiônicas.

Uma outra possibilidade estudada por Schönberg é a de definir G_n sobre o corpo dos complexos. Como resultado ele obtém uma álgebra equivalente à álgebra de Jordan-Wigner para os férmions.

Ainda dentro do espírito de se considerar a subordinação de estruturas algébricas, algumas hipóteses relevantes podem ser levantadas. No caso específico de $n = 2p = 4$ vemos que a álgebra de Clifford C_4 fica subordinada à G_4. Do ponto de vista métrico, é o grupo ortogonal O(4) que está relacionado à C_4. Como SU(n) e U(n) são subgrupos de O(2n), algumas estruturas algébricas do tipo Yang-Mills, relacionadas com grupos não-abelianos como SU(2) podem ser definidas. Entretanto, este não é um problema trivial por envolver teorias gerais de levantamento de estruturas algébricas. Contudo, estamos abordando neste momento essa possibilidade.

A álgebra comutativa L_n considerada como um cálculo para os tensores simétricos também fornece a possibilidade de algumas generalizações importantes. L_n definida sobre o corpo dos complexos fornece uma álgebra n-dimensional equivalente à álgebra de Dirac-Jordan-Klein dos operadores de criação e de destruição para os bósons. Desde que definamos L_n sobre um espaço linear de dimensão 2n e admitamos aí a existência duma forma bilinear antisimétrica definida por $\langle V, U' \rangle - \langle V', U \rangle$ associada à geometria afim do espaço n-dimensional de partida, poderemos definir uma álgebra simplética de dimensão 2n. É claro que se estivermos considerando o espaço de fases de um sistema, por exemplo, essa estrutura fica naturalmente associada ao fibrado cotangente. Essa estrutura simplética, especialmente quando a forma bilinear antisimétrica é não degenerada, cresce em importância na formulação axiomática da Teoria Quântica de Campos adotada por Segal. Para tanto, basta colocar as relações canônicas de comutação de Heisenberg na chamada forma de Weyl e definir um sistema de Weyl para os operadores unitários. Essa abordagem é feita, por exemplo, por Bongaarts a quem remetemos o leitor.

Outros aspectos muito importantes do estudo de L_n, alguns mencionados e outros bastante desenvolvidos pelo próprio Schönberg são a possibilidade de extensão da teoria da integração mesmo quando os integrandos não são funções ordinárias, com a integração podendo existir como um produto algébrico, o que leva a uma algebrização da análise funcional e à interpretação formal da teoria das distribuições. O esmiuçamento desses aspectos foge do escopo do presente trabalho e por si só justificaria outros trabalhos. Preferimos remeter o leitor aos trabalhos originais de Schöberg e a uma série de trabalhos que vêm sendo desenvolvidos na Universidade de Londres por Bohm, Hiley e Frescura.

4. ALGUNS ASPECTOS GEOMÉTRICOS DAS ÁLGEBRAS G-S - Como vimos no Capítulo anterior, a álgebra afim completa definida pelo produto direto $G_n \times L_n$ fornece um cálculo para os objetos afins descritos por tensores de valências quaisquer. Por outro lado, podemos considerar o superespaço definido no Capítulo 2, (x, θ), como uma variedade básica na qual age o grupo de reparametrização (grupo estendido GE). A variedade tangente à essa variedade terá o grupo de Lorentz (GL) como grupo tangente. É claro que essa definição de superespaço pode ser generalizada, por exemplo, admitindo-se uma estrutura analítica ao invés da afim usual mas isso, a nosso ver, além de complicar o problema de clareza desta exposição ainda apresenta o inconveniente de introduzir ab initio uma estrutura métrica decorrente da analiticidade. Vamos nos restringir ao superespaço ordinário. Do ponto de vista geométrico, uma álgebra é um espaço linear. As álgebras de Grassmann-Schönberg, sendo definidas por um produto direto já sugerem intuitivamente uma generalização da definição de variedade. A generalização óbvia é procurar uma estrutura de fibrado que tenha como espaço de base ou o espaço tempo ou um espaço mais geral como o superespaço, e que tenha como espaço total um produto local de espaços compatíveis com as simetrias do problema.

A questão fundamental que se coloca agora e que está sendo objeto de pesquisa do autor (ver bibliografia) é de como caracterizar a estrutura fibrada mais conveniente dentre as inúmeras possibilidades decorrentes das álgebras de Grassmann-Schönberg que possa descrever de modo satisfatório diversos aspectos relacionados com a incorporação da gravitação.

Voltemos ao caso do espaço (x, θ). É fácil de ver que este espaço não pode ser contraído a um ponto devido às relações de anticomutação para os θ. Isso quer dizer que a trivialidade local do fibrado não pode ser estendida para a trivialidade global.

As álgebras G-S oferecem grandes possibilidades de generalizações. Como uma sugestão para o estudo das superálgebras com N = 8, podemos fixar $G_4 \times L_4$ como sendo o ponto de partida. A fixação da dimensão 8 pode parecer arbitrária neste ponto mas, no nosso entender ela pode significar uma restrição natural que advém da existência de apenas alguns campos que são o dos números reais, o dos complexos, o dos quatérnions e o dos octônios (números de Cayley) compatíveis com a estrutura de álgebras quociente associativas. Essa restrição está ligada a um teorema clássico de Hurwitz que afirma que se uma álgebra quociente real associativa A tem uma norma que satisfaz

$$| a b | = | a | \, | b | \qquad a, b \in A$$

então o campo sobre o qual ela está definida só pode ser um dos citados acima. As álgebras de Clifford, tomadas como álgebras quociente reais são um exemplo. Por outro lado, a dimensão de uma álgebra quociente sempre será uma potência de 2. A dimensão de G_n é 2^{2n}. Têm sido feitas tentativas de generalização do teorema de Hurwitz com a procura de outras álgebras quociente com dimensões maiores que 8. Sob vá-

rios aspectos, esse problema ainda permanece em aberto. Como já afirmamos anteriormente, as álgebras G-S são uma realização que admitem representações tensoriais de qualquer valência. Em outros termos, dada a variedade de base M_* podemos definir um campo tensorial sobre M que será uma secção T^a_b (M), por exemplo. Para uma caracterização desses campos tensoriais, devemos estudar o chamado fibrado de referência F (M) associado a M. Se F (M) admitir uma secção definida por

$$s : M \rightarrow F (M)$$

então $x \longmapsto \{ V_1 (x) , \ldots , V_n (x) \}$

onde $\{ V_i \}$ é uma base de T (M). Isto vai significar que M admite transporte por paralelismo de vetores, ou seja, há um isomorfismo entre os diversos espaços tangentes $T_x(M)$. Este último chamamento é fundamental pois vai permitir a definição de n secções (que são funções contínuas) de T(M) que, com as devidas adequações, nos fornece o material necessário para a definição do levantamento de certas estruturas algébricas. Entretanto, não é qualquer variedade que admite que se defina transporte por paralelismo (pensado como um caso particular de levantamento). Um grupo de Lie sempre é paralelizável. Dado um grupo de Lie G, sua álgebra de Lie g é isomorfa ao espaço tangente T_e(G), onde e = identidade. As álgebras G-S são álgebras associativas. Como à toda álgebra associativa corresponde uma álgebra de Lie, desde que definamos convenientemente o colchete de Lie, definimos uma álgebra de Lie associada à cada álgebra G-S e daí inferimos algumas estruturas básicas. Dentre as estruturas que vão nos interessar mais, temos as noções de conexões, curvatura e torção. Pode-se mostrar que cada conexão decorre da definição de uma certa 1 forma w que pertence ao fibrado cotangente $T^*(P)$ onde P é o fibrado principal associado a M (F(M) é um exemplo de um fibrado principal). Neste ponto achamos importante remeter o leitor à consulta do artigo do Prof. Videira neste Simpósio , onde se encontra de modo cristalino um exemplo muito sugestivo do estudo do fibrado principal e suas implicações na teoria geral do Eletromagnetismo. O caráter abeliano do grupo U(1) da geometria das equações de Maxwell simplifica o tratamento e é bastante ilustrativo.

As álgebras G-S, no entanto, admitem diversos grupos não abelianos como base. É claro que embora sendo localmente isomorfos na álgebra, as estruturas geométricas desses grupos podem ser diferentes. No caso do superespaço e sua possível interpretação como espaço de base para as álgebras G-S, as teorias de Yang-Mills talvez sugiram a analogia mais marcante e um roteiro a ser seguido. Em Yang-Mills, onde o grupo estrutural é não abeliano como o SU(2), a conexão (potencial de gauge) e a curvatura (campo de gauge) refletem a existência de alguns aspectos geométricos peculiares. Para podermos introduzir campos materiais com partículas massivas e não massivas temos essencialmente de definir um fibrado vetorial real m-dimensional E sobre o espaço de base M de dimensão n ($n \geqslant m$). O grupo estrutural será Gl (m, R). Desse modo, um campo material será uma secção $\phi(x) = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$, ou seja, um m-pleto. No fibrado principal P associado a E, definimos uma conexão Γ que induz uma conexão Γ^E em E. As conexões assim

definidas obedecem a

$$\Gamma^{E \otimes T(M)} = \Gamma^E \otimes I + I \otimes \Gamma \qquad (9)$$

Analogamente, a curvatura satisfaz

$$R^{E \otimes T(M)} = R^E \otimes I + I \otimes R \qquad (10)$$

as notações sendo óbvias e as contrações sendo as usuais. O importante a se notar de (9) e (10) é que mesmo tendo um espaço tempo plano ($\Gamma = 0$), podemos ter uma geometria de Yang-Mills não plana ($\Gamma^E \neq 0$). O mesmo raciocínio se aplicaria à curvatura. É claro que as teorias de Yang-Mills fornecem muito mais que esse resultado geométrico que realçamos. No entanto, com a finalidade de fornecermos apenas um exemplo de como o grupo estrutural pode modificar a estrutura geométrica do fibrado, achamos que a ilustração é suficiente.

Como as teorias de Grande Unificação têm também por meta incorporar a gravitação, vamos agora fornecer alguns argumentos geométricos muito simples que podem ajudar a resolver o problema de classificação de estruturas fibradas que podem servir de candidatas à arena de unificação. O tipo de conexão utilizada em Relatividade Geral difere muito das conexões do Eletromagnetismo e das teorias de Yang-Mills. De um modo geral, as teorias da Relatividade Geral de Einstein e suas variantes são baseadas na geometria riemanniana (métrica). Elas podem admitir um tensor de torções que sempre está relacionado ao tensor de curvatura. Se a métrica for plana, a torção se anula. A primeira exceção à uma teoria essencialmente métrica que fornece as mesmas equações básicas para os campos que a teoria de Einstein é a teoria de Cartan. Na teoria de Cartan, que de certo modo engloba também a teoria de Weyl, é introduzida a noção básica de torção independentemente da curvatura. Na teoria do transporte paralelo de Levi-Civita, reduzimos o grupo do fibrado de referência F(M) de Gl (n, R) para O(n) e encontramos uma única conexão que satisfaz às imposições da torção ser nula e do transporte por paralelismo conservar os produtos escalares. Isso, em termos das componentes covariantes do tensor das torções significa simetria de índices, o que não ocorre na teoria de Cartan.

É importante notar que a divisão que adotamos entre teorias métricas sem torção ou com torção proveniente da curvatura e teorias com torção independente da curvatura vai nos servir para classificar os tipos de fibrados mais convenientes para as unificações e não pretende compreender as diversas teorias mais elaboradas existentes.

O problema da classificação de fibrados faz parte da chamada teoria das classes características. Para a classificação, partimos ou de fibrados principais ou de fibrados associados. De um modo geral, quando os grupos estruturais dos fibrados principais são O(k), SO(k) e U(k) temos, respectivamente, as classes de Pontrjagin, de Euler-Pontrjagin e de Chern. Para essas classes, a fixação dos grupos de cohomologia correspondentes depende de modo essencial da curvatura. A despeito do fato da teoria dessas três classes se constituir, a nosso ver, numa das mais belas fusões de conceitos algébricos e topológicos, a solução do nosso problema não se encontra aí. No fundo, queremos determinar uma classe que

nos dê informações sobre a estrutura fibrada que sejam independentes da curvatura. Ainda considerando os fibrados com estrutura de grupo, existe uma classe que pode satisfazer aos nossos requisitos. É a chamada classe de Stiefel-Whitney. O grupo estrutural do fibrado principal é O(k) e a diferença essencial entre essa classe e a de Pontrjagin é que os grupos de cohomologia de Stiefel-Whitney não são calculados com coeficientes reais como H^p (M; R) mas sim com coeficientes Z/2 (grupo aditivo dos inteiros módulo 2) como H^p (M ; Z/2). Vamos reunir aqui apenas alguns resultados importantes. As classes são denominadas de $w_i(E)$ para o fibrado vetorial associado e de w_i (P) para o fibrado principal. Se tomamos E = T (M), para i = 1 e 2, temos que se w_1(T (M)) = 0, M será orientável, enquanto que se w_1(T (M)) $\neq$ 0, M não será orientável. Analogamente, se w_2(T (M)) = 0, M admite uma estrutura com spin, enquanto que se w_2(T (M)) $\neq$ 0, M não admite estrutura com spin. A relevância dessas observações é óbvia. Se tentamos definir espinores numa variedade M para a qual w_2 = 0, teremos a impossibilidade de definir o transporte paralelo desses espinores em M. Então, para definirmos espinores em M, temos de ter w_2 = 0 e também w_1 = 0. Essas restrições são essenciais para que possamos incluir multipletos de partículas com spin nas teorias unificadas. Vemos assim um bom exemplo de como a topologia da variedade de partida pode definir aspectos fundamentais das teorias físicas. Muito poderia ser dito ainda sobre o problema classificatório mas isso fica para um trabalho mais técnico.

5. CONCLUSÕES - O leitor que teve a paciência de chegar até este ponto já pôde perceber o caráter informal que imprimimos à dissertação. A nossa finalidade foi a de apresentar algumas sugestões e, a partir destas, algumas especulações. Em alguns casos as sugestões são inteiramente intuitivas. Esse caminho intuitivo pode levar à conclusões errôneas quando um formalismo matemático mais rigoroso é encontrado. Entretanto, no nosso modo pessoal de encarar a ciência, esse caminho intuitivo natural deve ser trilhado até o momento de encontrarmos dificuldades que nos façam mudar de rumo. Há vários anos, quando ainda aluno de graduação do Prof. Schönberg, começamos a tomar contacto com seu trabalho sobre algebrização da Física. Confessamos que por muito tempo a monografia " Quantum Mechanics and Geometry " permaneceu para nós como uma obra misteriosa que possivelmente nada acrescentava à Mecânica Quântica que estudávamos e pensávamos entender. Foram necessários muitos anos de maturação e experiência para que pudéssemos notar que as conseqüências de várias teorias físicas seriam melhor entendidas e estendidas se uma postura globalizante à la Schönberg fosse adotada. Foi com o espírito de tentar apresentar como algumas idéias de Schönberg ainda não totalmente exploradas podem ser complementadas e adicionadas às teorias de Grandes Unificações que aceitamos o convite de fazer esta exposição.

Estamos perfeitamente cônscios de que alguns aspectos fundamentais não foram abordados. Como exemplo, podemos citar o problema da classificação. Pode ser que tenhamos de

partir de definições mais gerais de fibrados, como a dada na teoria de Ehresmann-Feldbau, na qual não definimos a priori a topologia do grupo estrutural. Essa topologia seria fixada por imposições algébricas bem gerais. Esse ponto de vista tem de ser considerado. Por outro lado, mesmo aspectos gerais que mencionamos podem não ter ficado claros dentro do " bundle " de idéias apresentado. Isso pode ser remediado, em parte, recorrendo à bibliografia.

BIBLIOGRAFIA

a) Aspectos gerais

1) M. Schönberg, " Quantum Mechanics and Geometry ", São Paulo (1957). Publicado em 5 partes nos Anais da Academia Brasileira de Ciências, 28,11(1956) ; 29, 473 (1957); 30, 1 (1958) ; 30, 117 (1958) e 30, 259 (1958)

2) F. A. M. Frescura e B. J. Hiley, Rev. Bras. Fis. (Volume especial dedicado a M. Schönberg) pp.49, Julho (1984)

3) N. C. Fernandes, " The Grassmann-Schönberg algebras and some aspects of Grand Unification " em preparação

4) S. W. Hawking e M. Rocek (eds.) " Superspace and Supergravity ", Cambridge Univ. Press (1981). Em especial o artigo de M. Rocek onde o tratamento algébrico é semelhante ao desenvolvido em 1).

5) E. Sokatchev em " Mathematical Problems in Theoretical Physics ", Lecture Notes on Physics, vol.153, Springer Berlin (1982)

6) S. Ferrara, " Supersymmetry ", World Sci. Publ., Singapore (1984)

7) A. Zee, " Unity of Forces in the Universe " 2 vol., World Sci., Singapore (1982)

b) Citações específicas

8) P. J. Bongaarts, " Linear Fields According to I. E. Segal ", em " Mathematics of Contemporary Physics ", ed. R. F. Streater, Academic Press, London (1972)

9) M. Göckeler e H. Joos, " On Kähler's Geometric Description of Dirac Fields ", Desy 83-128 (1983)

10) H. Joos, " Boson-Fermion Symmetry and Dirac Kähler Forms" Rev. Bras. Fis., Volume Especial dedicado a M. Schönberg) pp. 169, Julho (1984)

c) Bibliografia matemática

11) N. Steenrod, " The Topology of Fibre Bundles ", Princeton University Press, Princeton (1972)

12) C. Nash e S. Sen, " Topology and Geometry for Physicists" Academic Press, London (1983)

13) B. F. Schutz, " Geometrical Methods of Mathematical Physics ", Cambridge Univ. Press, Cambridge (1980)

14) E. H. Spanier, " Algebraic Topology ", McGraw-Hill, N. York (1966)

15) G. de Rham, " Variétés Différentiables ", Hermann, Paris (1973)