

IFUSP/P 534
B.I.F. - USP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA
CAIXA POSTAL 20516
01498 - SÃO PAULO - SP
BRASIL

PUBLICAÇÕES

IFUSP/P-534

ORDEM, DESORDEM E CAOS NA REDE CRISTALINA

Mário J. de Oliveira e Silvio R.A. Salinas
Instituto de Física, Universidade de São Paulo

Junho/1985

ORDEM, DESORDEM E CAOS NA REDE CRISTALINA*

Mário J. de Oliveira e Silvio R.A. Salinas

Instituto de Física
Universidade de São Paulo
C.P. 20516
01498 - São Paulo - SP

RESUMO

Analisamos em detalhe as propriedades de dois mapeamentos bidimensionais que correspondem à solução de modelos de spin na árvore de Cayley no limite de coordenação infinita. Os modelos considerados se originam em mecanismos propostos para explicar a ocorrência de fases moduladas em cristais magnéticos. Mostramos que aparecem escadas do diabo caracterizadas por uma dimensionalidade fractal que aumenta com a temperatura. Apresentamos evidências numéricas de que existe um atrator estranho, de caráter fractal, no modelo de Ising com interações competitivas ao longo dos ramos da árvore de Cayley. A rota para o caos se verifica de acordo com o cenário de Feigenbaum.

ABSTRACT

We analyze in detail the properties of two two-dimensional mappings corresponding to the solutions of spin models on a Cayley tree in the infinite coordination limit. The models under consideration are related to some mechanisms which were proposed to explain the occurrence of modulated phases in magnetic crystals. We show the existence of devil's staircases characterized by fractal dimensionalities which increase with temperature. We present numerical evidences to support the existence of a strange attractor, of a fractal character, in the Ising model with competing interactions restricted to the branches of a Cayley tree. The route to chaos agrees with the scenario of Feigenbaum.

Nossas investigações sobre as propriedades termodinâmicas de sistemas magnéticos com ordenamentos modulados foram inspiradas em medidas experimentais realizadas no Laboratório de Baixas Temperaturas do IFUSP. Como sabemos, no início da década de 60 o Prof. Schemberg foi a figura central no processo de criação de um núcleo de pesquisa em Física do Estado Sólido no antigo Departamento de Física da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP. Temos grande satisfação, portanto, em apresentar um trabalho desta natureza como parte das comemorações que se realizam por ocasião do seu septuagésimo aniversário. Além disto, o Prof. Schemberg foi um pioneiro na introdução de métodos de teoria de campos em Mecânica Estatística e responsável, durante vários anos, pelas disciplinas desta área na Universidade de São Paulo.

Vamos inicialmente nos referir a uma experiência realizada por Carlos Becerra e Nei Oliveira⁽¹⁾, em colaboração com um grupo do MIT, para a determinação detalhada das fronteiras de fases do composto MnP nas vizinhanças do chamado ponto de Lifshitz (ver a Fig. 1). O gráfico representa o campo magnético aplicado na direção intermediária do cristal contra a temperatura. Há uma fase paramagnética, desordenada, uma fase ferro magnética, bem como uma fase modulada, que é chamada de "fan", ou leque. Os cristais de MnP exibem camadas magnéticas ao longo do eixo duro. Na fase leque, a magnetização por spin aponta ao longo de uma certa direção numa camada, ao longo de uma direção ligeiramente diferente na camada seguinte, e assim por diante, descrevendo um leque no espaço, com um determinado comprimento de onda. Experiências posteriores de difração de nêutrons

verificaram que o número de onda varia ao longo da linha leque-paramagnética, e que se anula no ponto de Lifshitz (ao longo da linha ferro-paramagnética o número de onda é nulo). Acreditamos que esta se trata de uma das medidas mais claras e completas nas vizinhanças de um ponto de Lifshitz. No diagrama de fases expandido, inserido dentro da Fig. 1, está o gráfico completo do campo contra a temperatura. Nas proximidades da origem há uma outra fase que possui um ordenamento helicoidal completo - ao longo do eixo duro a magnetização por spin descreve uma hélice no espaço.

Nos últimos anos as atenções do nosso grupo em São Paulo se dirigiram em parte para a interpretação de resultados nas vizinhanças de pontos multicríticos. Existem poucos pontos multicríticos disponíveis e o ponto de Lifshitz é um deles, com características bem definidas. Na literatura há uma série de exemplos de materiais magnéticos com ordenamentos modulados, embora só o MnP tenha sido explorado em detalhe. Em muitos casos há transições entre fases com modulações diferentes, sendo possível, por exemplo, fazer um gráfico do número de onda principal de cada uma destas fases em função de um parâmetro como a temperatura. Gráficos desta natureza, para materiais que exibem uma sucessão de fases moduladas, constituem um exemplo do que tem sido chamado ultimamente de "escada do diabo". Há também materiais de caráter ferroelétrico que exibem fenômenos deste tipo - um dos nossos modelos teóricos aparentemente explica os aspectos qualitativos do diagrama de fases de uma substância ferroelétrica denominada tiuréia.

Basicamente dois tipos de mecanismos têm sido utili

zados para explicar o magnetismo modulado⁽²⁾. Num deles, os spins interagem competitivamente ao longo de um eixo. Assim, a interação entre spins pode ser escrita na forma

$$-J_1 S_{i,j,k} S_{i,j,k+1} - J_2 S_{i,j,k} S_{i,j,k+2} \quad (1)$$

onde $S_{i,j,k}$ é um spin de Ising (± 1) na posição (i,j,k) da rede cristalina e os parâmetros de intercâmbio têm sinais opostos (por exemplo, $J_1 > 0$ e $J_2 < 0$). Neste caso, os primeiros vizinhos ao longo do eixo z interagem ferromagneticamente, enquanto os segundos vizinhos interagem antiferromagneticamente. Há uma competição entre os dois tipos de ordenamento, que pode levar à existência de fases moduladas. No outro mecanismo, a interação é dada pelo chamado hamiltoniano de Dzyaloshinski-Moriya, isto é, pela expressão

$$-J_1 \vec{S}_\ell \cdot \vec{S}_{\ell'} - J_2 (\vec{S}_\ell \times \vec{S}_{\ell'}) \cdot \vec{z} \quad (2)$$

onde \vec{S}_ℓ é um spin vetorial na posição ℓ de uma rede cristalina e \vec{z} é um vetor unitário na direção do eixo z . O primeiro termo representa uma tendência de alinhamento dos spins, enquanto o termo que envolve o produto vetorial favorece spins perpendiculares. A existência desta competição entre primeiros vizinhos é que pode gerar estruturas moduladas.

O primeiro mecanismo do parágrafo anterior dá origem a um hamiltoniano de Ising que foi proposto por Elliott em 1961 para explicar o ordenamento modulado em cristais de érbio. Este modelo, que ultimamente tem sido chamado de modelo ANNNI

("axial next-nearest-neighbor Ising"), é dado pelo hamiltoniano

$$H = -J_0 \sum_{(ij)}^{(xy)} S_i S_j - J_1 \sum_{(ij)}^{(z)} S_i S_j - J_2 \sum_{(ik)}^{(z)} S_i S_k - H \sum_i S_i \quad (3)$$

onde $S_i = \pm 1$, para qualquer ponto i de uma rede cúbica simples e H é o campo magnético aplicado. Temos assim uma interação $J_0 > 0$ entre primeiros vizinhos nos planos (xy) , $J_1 > 0$ entre primeiros vizinhos ao longo do eixo z , e $J_2 < 0$ entre segundos vizinhos ao longo do eixo z . Denominamos $p \equiv -J_2/J_1$ o parâmetro que indica a competição entre primeiros e segundos vizinhos.

O hamiltoniano de Dzyaloshinski-Moriya a campo nulo é dado por

$$H = -J_1 \sum_{(ij)} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - J_2 \sum_{(ij)} (\vec{S}_i \times \vec{S}_j) \cdot \vec{z} \quad (4)$$

onde (ij) indica um par de primeiros vizinhos. Podemos simplificar um pouco este modelo supondo que \vec{S}_i seja um vetor bidimensional, com módulo constante, apontando apenas em p direções distintas. Esta forma particular do hamiltoniano de Dzyaloshinski-Moriya tem sido chamada na literatura recente de "modelo de Potts quiral". Neste caso o hamiltoniano (4) pode ser escrito como

$$H = -J \sum_{(ij)} \cos \frac{2\pi}{p} (n_i - n_j - \Delta) \quad (5)$$

onde J e Δ dependem de J_1 e J_2 , e n é um inteiro que va

ria de 0 a $p-1$.

Estes dois mecanismos têm sido bastante estudados na literatura. Embora ambos tenham sido considerados pelo nosso grupo aqui em São Paulo, o modelo ANNNI é mais conhecido e certamente vale a pena descrever algumas de suas propriedades⁽³⁾. Podemos construir um diagrama de fases em que um dos eixos é a temperatura e o outro é o parâmetro p . Este diagrama de fases já foi estudado por várias técnicas, que essencialmente confirmam a imagem produzida por uma aproximação cuidadosa de campo médio. Na Fig. 2 - que tem uma certa semelhança com a Fig. 1 - pode-se notar uma fase paramagnética, uma fase ferromagnética, e uma região em que aparecem inúmeras fases moduladas. A temperaturas baixas, para $p > \frac{1}{2}$, temos uma fase modulada em que, ao longo da direção z , há sempre dois planos com a magnetização por spin positiva seguidos por dois planos com a magnetização por spin negativa. Podemos associar a esta fase um número de onda principal, $q = 2\pi/4$, onde 4 é o período de repetição em unidades do parâmetro da rede cristalina. As outras fases moduladas podem ser analisadas numericamente e também são caracterizadas por um determinado número de onda principal. As linhas paramagnéticas, por outro lado, podem ser obtidas analiticamente dentro da aproximação de campo médio. Também é possível verificar analiticamente que ao longo da fronteira para-modulada o número de onda varia continuamente com p , indo a zero no ponto de Lifshitz. Portanto, a baixas temperaturas a modulação é caracterizada por comprimentos de onda comensuráveis com o parâmetro da rede cristalina, enquanto se espera que a temperaturas mais altas surjam regiões de fases incomensuráveis. Um dos problemas

que têm intrigado os investigadores desta área é o surgimento das fases incomensuráveis - será que elas existem a temperaturas baixas? a partir de que temperatura elas começam a ocupar uma região finita do diagrama $T \times p$?

A análise de campo médio do modelo ANNNI se baseia na equação

$$m_k = \tanh \frac{1}{k_B T} \left\{ 4J_0 m_k + J_1 (m_{k-1} + m_{k+1}) + J_2 (m_{k-2} + m_{k+2}) + H \right\} . \quad (6)$$

onde m_k é a magnetização por spin de um plano (xy) na posição k . Esta é uma expressão tradicional de campo médio, mas que além de m_k envolve também as magnetizações dos planos primeiros e segundos vizinhos. Em colaboração com Mauricio Coutinho, de Recife, o nosso grupo realizou uma análise numérica detalhada desta equação não linear de diferenças⁽³⁾. No entanto, a análise é trabalhosa e fica quase impossível à medida que a temperatura sobe e que começam a surgir inúmeras fases moduladas, com os mais diversos períodos. Certamente as questões mais sutis sobre o diagrama de fases não poderão ser respondidas através deste tipo de análise.

A Eq. (6) é uma equação de diferenças não linear, de quarta ordem, e pode, portanto, ser escrita como um problema de mapeamento num espaço quadridimensional (ou seja, como um conjunto de quatro equações de diferenças de primeira ordem). Existem algumas análises recentes deste mapeamento, mas em geral elas também são muito trabalhosas. Embora os volumes sejam preservados sob o mapeamento (isto é, o jacobiano do sistema de equações é

unitário), as soluções estáveis (pontos fixos, ciclos limites) correspondem a soluções instáveis termodinamicamente. Como estamos interessados em soluções termodinamicamente estáveis, o problema fica imensamente complicado.

Antes de entrar nos aspectos específicos dos nossos trabalhos mais recentes, convém mencionar as propriedades de um modelo de Ising, com interações apenas entre primeiros vizinhos, definido sobre uma estrutura denominada árvore de Cayley. Na Fig. 3, onde esboçamos o desenho de um árvore de Cayley com coordenação $z=3$, estão indicados o sítio central e três gerações designadas pelo índice r . A árvore de Cayley se caracteriza pela simetria radial e pela inexistência de ciclos fechados. É justamente esta última propriedade que nos permite escrever a equação de recorrência exata

$$m_r = \tanh \left\{ \beta H + \frac{z-1}{2} \ln \frac{1 + (\tanh \beta J) m_{r-1}}{1 - (\tanh \beta J) m_{r-1}} \right\}, \quad (7)$$

onde $\beta = 1/k_B T$, para a magnetização por spin, m_r , de um sítio na geração r da árvore, em termos de m_{r-1} , para um sítio na geração anterior. Esta equação não passa então de um mapeamento unidimensional, que pode ser analisado com facilidade. Um ponto fixo deste mapeamento, $m_r = m_{r-1} = m^*$, corresponde à conhecida aproximação de Bethe-Peierls para o modelo de Ising numa rede de Bravais com coordenação z . Portanto, embora haja uma série de características não físicas associadas à árvore de Cayley, o ponto fixo do mapeamento, ou seja, a magnetização por spin bem no centro de uma árvore muito grande, corresponde à aproximação

física de Bethe-Peierls. Além disto, um aspecto interessante deste problema, que foi bastante explorado pelo nosso grupo aqui em São Paulo, consiste no estudo do mapeamento no limite de coordenação infinita, isto é, para $z \rightarrow \infty$, $J \rightarrow 0$, com $zJ = \text{constante}$. Neste caso a Eq. (7) pode ser escrita como

$$m_r = \tanh \left\{ \beta H + \beta z J m_{r-1} \right\}, \quad (8)$$

cujo ponto fixo m^* corresponde à conhecidíssima aproximação de campo médio para a magnetização por spin do modelo de Ising.

Recentemente estudamos na árvore de Cayley tanto o modelo de Potts quiral quanto um análogo do modelo ANNNI - que vamos chamar de modelo de Vannimenus - em que as interações competitivas ocorrem entre primeiros e segundos vizinhos ao longo da direção radial. Verificamos a enorme simplicidade que surge no limite de coordenação infinita. Por exemplo, no caso do modelo de Potts quiral, o problema se escreve como um mapeamento p -dimensional. No entanto, no limite de coordenação infinita o sistema se reduz a duas equações de primeira ordem, ou seja, a um mapeamento bidimensional. O modelo de Vannimenus, inicialmente estudado numa árvore de coordenação $z=3$, pode ser escrito como um mapeamento tridimensional para z finito. No entanto, no limite de coordenação infinita ele também se reduz a um mapeamento bidimensional, que pode então ser estudado numericamente de forma detalhada e precisa. Somente nestas circunstâncias é que conseguimos responder as questões mais sutis colocadas a respeito do diagrama de fases - qual a natureza da escada do diabo (para T fixo, à medida que p varia)? qual a dimensionalidade fractal da escada do diabo (isto é, qual a extensão ocu

pada pelas fases incomensuráveis)? qual a variação da dimensionalidade fractal da escada do diabo com a temperatura? qual a natureza dos atratores (isto é, das fases moduladas) para T e p fixos?

Inicialmente, Carlos Yokoi e Mário de Oliveira⁽⁴⁾ estudaram o modelo de Potts quiral de p estados no limite de coordenação infinita. Escrevendo as duas componentes da magnetização por spin na forma complexa

$$m_r = m_{r,x} + i m_{r,y} \quad , \quad (9)$$

o problema se reduz ao mapeamento bidimensional

$$m_r = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{p-1} e_n \exp\left\{\frac{1}{T} \exp\left[i \frac{2\pi}{p} \Delta\right] m_{r-1} e_n^* + c.c.\right\} \quad , \quad (10)$$

onde a temperatura é dada em unidades de k_B/zJ , e_n é a raiz n -ésima da unidade e N é um fator de normalização dado por

$$N = \sum_{n=0}^{p-1} \exp\left\{\frac{1}{T} \exp\left[i \frac{2\pi}{p} \Delta\right] m_{r-1} e_n^* + c.c.\right\} \quad . \quad (11)$$

A partir da Eq. (10) é possível estudar em detalhe o diagrama de fases no plano $T \times \Delta$ (ver a Fig. 4). Na literatura estava em aberto o problema da dimensionalidade fractal da escada do diabo (ver a Fig. 5a, em que os patamares representam a extensão das fases comensuráveis) - qual a dimensionalidade do conjunto de pontos que sobrevive quando são subtraídos, num dado intervalo entre Δ_1 e Δ_2 , todos os patamares com extensão superior a

uma certa medida arbitrariamente pequena ϵ ? A dimensionalidade fractal D_F é obtida a partir do coeficiente angular das retas mostradas na Fig. 5b, onde $L(\epsilon)$ é o comprimento que resta quando subtraímos do intervalo $\Delta_2 - \Delta_1$ todos os patamares com comprimentos superiores a ϵ . Com $D_F < 1$ para temperaturas baixas, não há dúvidas de que, nestas circunstâncias, as fases incomensuráveis ocupam uma região de medida nula e a escada do diabo é completa. No entanto, quando a temperatura aumenta a dimensionalidade fractal tende à unidade, indicando assim que as fases incomensuráveis podem ocupar regiões finitas do plano e a escada do diabo, portanto, se torna incompleta.

O modelo de Vannimenus no limite de coordenação infinita pode ser escrito como um mapeamento extremamente simples⁽⁵⁾, dado pela equação

$$m_r = \tanh \frac{1}{T} (m_{r-1} - p m_{r-2} + H) \quad , \quad (12)$$

onde T é a temperatura em unidades de k_B/zJ_1 , $p = -z^2 J_2/zJ_1$ e H é o campo aplicado. A partir desta equação obtivemos o diagrama de fases no plano $T \times p$ (ver a Fig. 6). Estudamos em detalhe a sucessão de fases moduladas e a dimensão fractal da escada do diabo, no estilo do que já havia sido feito no caso do modelo de Potts quiral. A grande surpresa, no entanto, foi o aparecimento de atratores estranhos, de natureza fractal, associados a ordenamentos modulados em que os spins se dispõem de maneira caótica ao longo da direção radial. Vamos examinar este ponto em detalhe nos próximos parágrafos.

A Eq. (12) foi estudada numericamente apenas para

$H=0$. Inicialmente escolhemos um ponto no diagrama de fases, isto é, fixamos T e p . Em geral adotamos $m_0 = m_1 = 1$ como as condições iniciais do mapeamento (esta escolha é arbitrária, embora sempre deva ser examinada a possibilidade de coexistência de atratores estáveis atingidos a partir de diferentes condições iniciais). Como m_r varia entre -1 e $+1$, é fácil desenhar os fluxos correspondentes à Eq. (12). Na Fig. 7 mostramos um fluxo típico para um ponto na região paramagnética, com $T > 1/4p$. Neste exemplo o fluxo se inicia no ponto $(1,1)$ e acaba atingindo a origem, ou seja, atingindo um ponto fixo trivial paramagnético, de forma oscilatória. Na Fig. 8 mostramos um gráfico típico na região $(3,3)$ - depois de um transitório inicial, a magnetização acaba percorrendo apenas seis valores, que caracterizam uma fase modulada comensurável com $q = 2\pi/6$. Na região incomensurável temos um ciclo limite - após um transitório inicial, a magnetização percorre, com uma certa precisão, todos os pontos de uma curva fechada (ver a Fig. 9, para um ponto (T,p) logo abaixo da linha crítica paramagnética modulada). A partir da análise destes atratores é que foi possível obter o diagrama de fases (Fig. 6) e analisar a dimensionalidade fractal da esca da do diabo. Na região hachurada da Fig. 6 detectamos a possibilidade de coexistência de fases; nesta região o limite de estabilidade da fase ferromagnética penetra dentro da região de estabilidade modulada. Os atratores estranhos foram encontrados inicialmente dentro desta região, com as condições iniciais $m_0 = m_1 = 1$. Na Fig. 10 mostramos o diagrama de fluxo de um atrator estranho - a princípio poderíamos pensar que não passa de um ciclo limite correspondente a uma certa fase incomensurável.

No entanto, as figuras seguintes, 11, 12 e 13, evidenciam claramente que esta curva é na realidade formada por uma coleção de curvas que se subdividem em mais curvas à medida que o diagrama é observado em maior detalhe, com maior precisão. Estamos, portanto, diante de um atrator que aparentemente possui características de auto-similaridade, ou de homotetia, que constituem a propriedade principal dos fractais.

Além de examinar as características de auto-similaridade do atrator estranho, calculamos o chamado expoente de Lyapunov e estudamos a "rota para o caos". Na Fig. 14 mostramos a variação do expoente de Lyapunov λ com o parâmetro p para $T = 0,2$ - o caos se estabelece nos intervalos em que $\lambda > 0$. Observando este gráfico em detalhe, verificamos que λ exibe uma série de picos, ou seja, vai a zero para uma certa seqüência de valores de p , antes de entrar numa região de valores positivos. Os picos, ou zeros de λ , correspondem a uma série de bifurcações, ou seja, transições entre fases moduladas de períodos diferentes, que definem uma rota para o caos. Damos abaixo, na Tabela I, os valores numéricos para as posições destas bifurcações. Temos, portanto, uma seqüência de dobramentos de período, que se encaixa muito bem dentro do chamado "cenário de Feigenbaum" para o caos. Na Tabela II calculamos a razão $\delta_n \equiv (p_{n+1} - p_n) / (p_{n+2} - p_{n+1})$, que no limite $n \rightarrow \infty$ deve corresponder a um dos expoentes universais definidos por Feigenbaum. Os resultados da Tabela II estão em impressionante concordância com o valor limite $\delta = 4,4692016\dots$ obtido por Feigenbaum para o mapeamento logístico, $x_{i+1} = \lambda x_i (1 - x_i)$.

TABELA I

PERÍODO	ORDEM (n)	VALOR DE p (p_n)
16	1	0,695 959 675 44
32	2	0,696 021 075 024
64	3	0,696 034 739 418
128	4	0,696 037 687 838
256	5	0,696 038 320 412
512	6	0,696 038 455 939
1024	7	0,696 038 484 967
2048	8	0,696 038 491 184
4096	9	0,696 038 492 515

TABELA II

n	δ_n
1	4,4934
2	4,6344
3	4,6609
4	4,6675
5	4,6688
6	4,6691
7	4,668

Em resumo, o modelo de Vannimenus apresenta um atrator estranho que se realiza através de uma rota para o caos de acordo com o cenário de Feigenbaum. Embora o mapeamento bidimensional correspondente ao modelo de Vannimenus tenha pouco em comum com o mapeamento logístico, mais uma vez prevalecem as características universais do comportamento caótico.

*Texto baseado numa palestra apresentada por SRS durante o Simpósio em comemoração aos 70 anos do Prof. M. Schemberg.

REFERÊNCIAS

- (1) C.C. Becerra, Y. Shapira, N.F. Oliveira Jr. e T.S. Chang, Phys. Rev. Lett. 44, 1692 (1980). Ver também Y. Shapira, C. C. Becerra, N.F. Oliveira Jr. e T.S. Chang, Phys. Rev. B24, 2780 (1981); C.S.O. Yokoi, M.D. Coutinho-Filho e S.R. Salinas, Phys. Rev. B24, 5430 (1981) e Phys. Rev. B29, 6341 (1984).
- (2) Ver, por exemplo, Mário J. de Oliveira, "Modelo de Potts planar assimétrico: solução na árvore de Cayley", Tese de Livre Docência, IFUSP, 1984.
- (3) Ver, por exemplo, C.S.O. Yokoi, M.D. Coutinho-Filho e S.R. Salinas, Phys. Rev. B24, 4047 (1981) e as referências citadas neste trabalho.
- (4) C.S.O. Yokoi e M.J. de Oliveira, J. Phys. A18, L153 (1985).
- (5) C.S.O. Yokoi, M.J. de Oliveira e S.R. Salinas, Phys. Rev. Lett. 54, 163 (1985).

LEGENDAS DAS FIGURAS

Fig. 1 - Diagrama de fases do MnP nas vizinhanças do ponto de Lifshitz (figura reproduzida do trabalho de Becerra, Shapira, Oliveira e Chang⁽¹⁾). O campo magnético é aplicado na direção intermediária, \hat{b} , enquanto a modulação ocorre ao longo do eixo duro, \hat{a} . A figura menor mostra o diagrama completo, incluindo o ponto triplo inferior.

Fig. 2 - Esboço do diagrama de fases do modelo ANNNI. Na região modulada estão sendo indicadas apenas algumas fases comensuráveis.

Fig. 3 - Árvore de Cayley com três gerações e um sítio central. Estão indicadas, pela letra J, algumas interações entre primeiros vizinhos.

Fig. 4 - Diagrama de fases, no plano $T \times \Delta$, do modelo de Potts quiral no limite de coordenação infinita. Estão sendo indicadas, pelo número de onda principal, apenas as fases comensuráveis mais importantes. Na região hachurada há possibilidade de coexistência de fases.

Fig. 5a - Escada do diabo para o modelo de Potts quiral no limite de coordenação infinita, em três temperaturas diferentes. Os patamares representam fases comensuráveis com extensão superior a 3×10^{-5} .

Fig. 5b - Gráfico log-log de $L(\epsilon)/\epsilon$ como função de $1/\epsilon$ para diversas temperaturas. A tangente destas retas fornece a dimensionalidade fractal D_F associada à escada do diabo.

Fig. 6 - Diagrama de fases, no plano $T \times p$, do modelo de Vannimenus no limite de coordenação infinita. Estão sendo indicadas, pelo número de onda principal, apenas as fases comensuráveis mais significativas. Na região hachurada são estáveis os pontos fixos correspondentes às fases ferromagnética e modulada.

Fig. 7 - Fluxo típico na região paramagnética (com $T > \frac{1}{4} p$). Estão desenhados 400 pontos obtidos por iterações a partir da condição inicial $M_0 = M_1 = 1$.

Fig. 8 - Fluxo típico na região da fase comensurável (3,3). Estão desenhados 1000 pontos obtidos por iterações a partir da condição inicial $M_0 = M_1 = 1$.

Fig. 9 - Fluxo típico na região incomensurável. Estão desenhados 400 pontos obtidos por iterações a partir da condição inicial $M_0 = M_1 = 1$.

Fig. 10 - Atrator estranho associado ao modelo de Vannimenus. As primeiras 10^4 iterações são descartadas, sendo colocados no gráfico apenas os pontos correspondentes às 10^4 iterações subsequentes.

Fig. 11 - Ampliação do retângulo indicado na Fig. 10. As primeiras 10^4 iterações são descartadas. De um total de 82426 iterações subsequentes, são localizados neste gráfico apenas 5000 pontos.

Fig. 12 - Ampliação do retângulo indicado na Fig. 11. As primeiras 10^4 iterações são descartadas. De um total de 3×10^6 iterações, são localizados neste gráfico apenas 3000 pontos.

Fig. 13 - Ampliação do retângulo indicado na Fig. 12. As primeiras 10^4 iterações são descartadas. De um total de 10^7 iterações, são localizados neste gráfico apenas 15000 pontos. Esta seqüência de figuras - da Fig. 10 à Fig. 13 - ilustra a propriedade de auto-similaridade do atrator estranho.

Fig. 14 - Variação do expoente de Lyapunov λ com o parâmetro p para $T=0,2$. As órbitas caóticas correspondem a $\lambda > 0$.

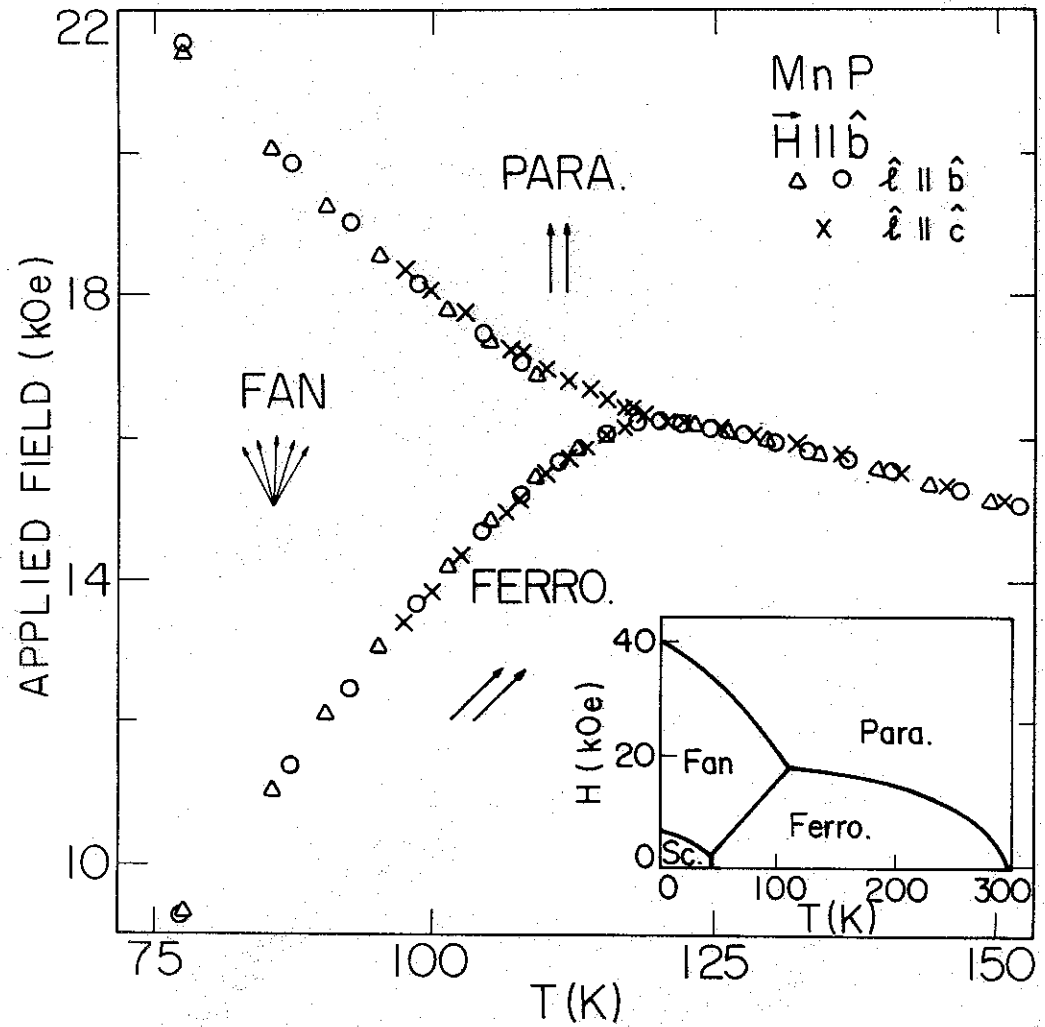


FIG. 1

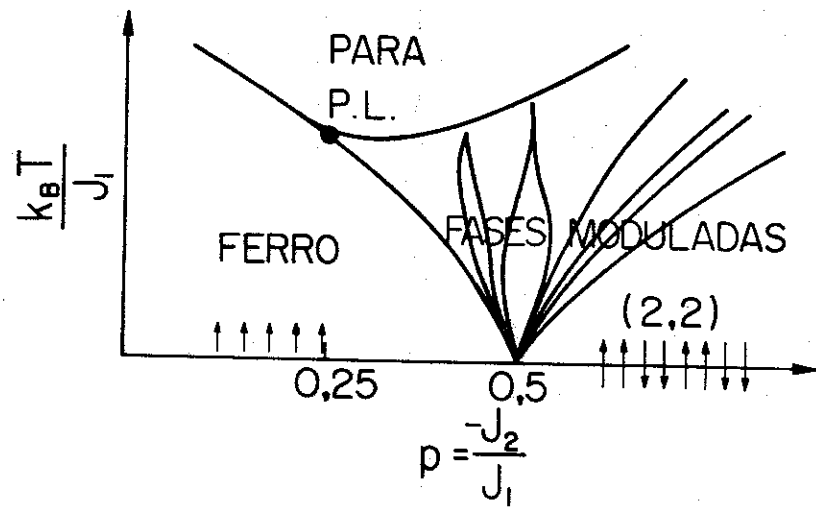


FIG. 2

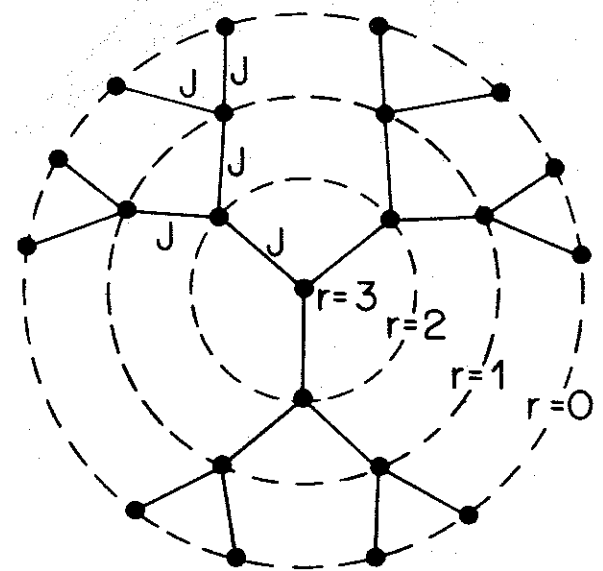


FIG. 3

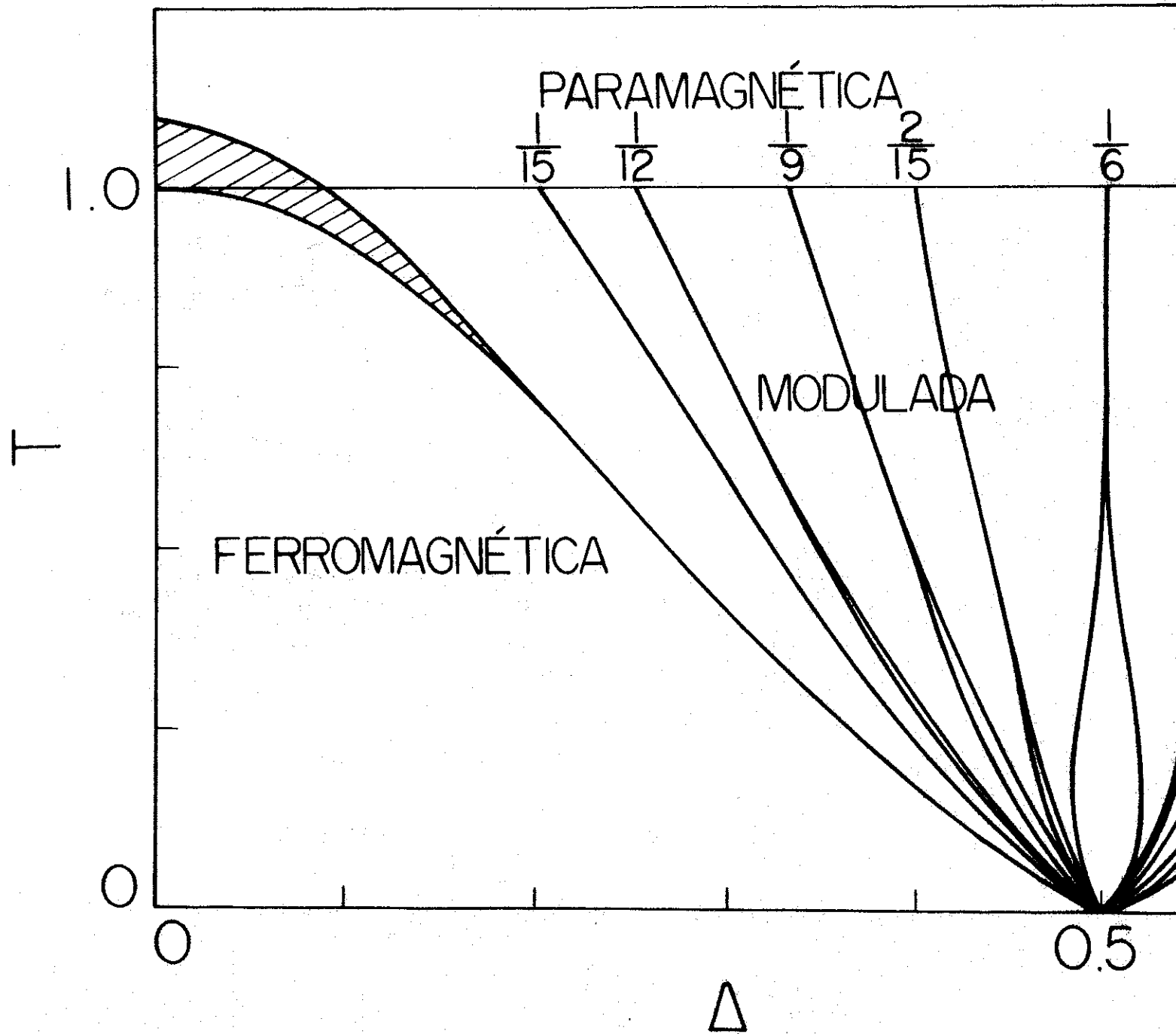


FIG.4

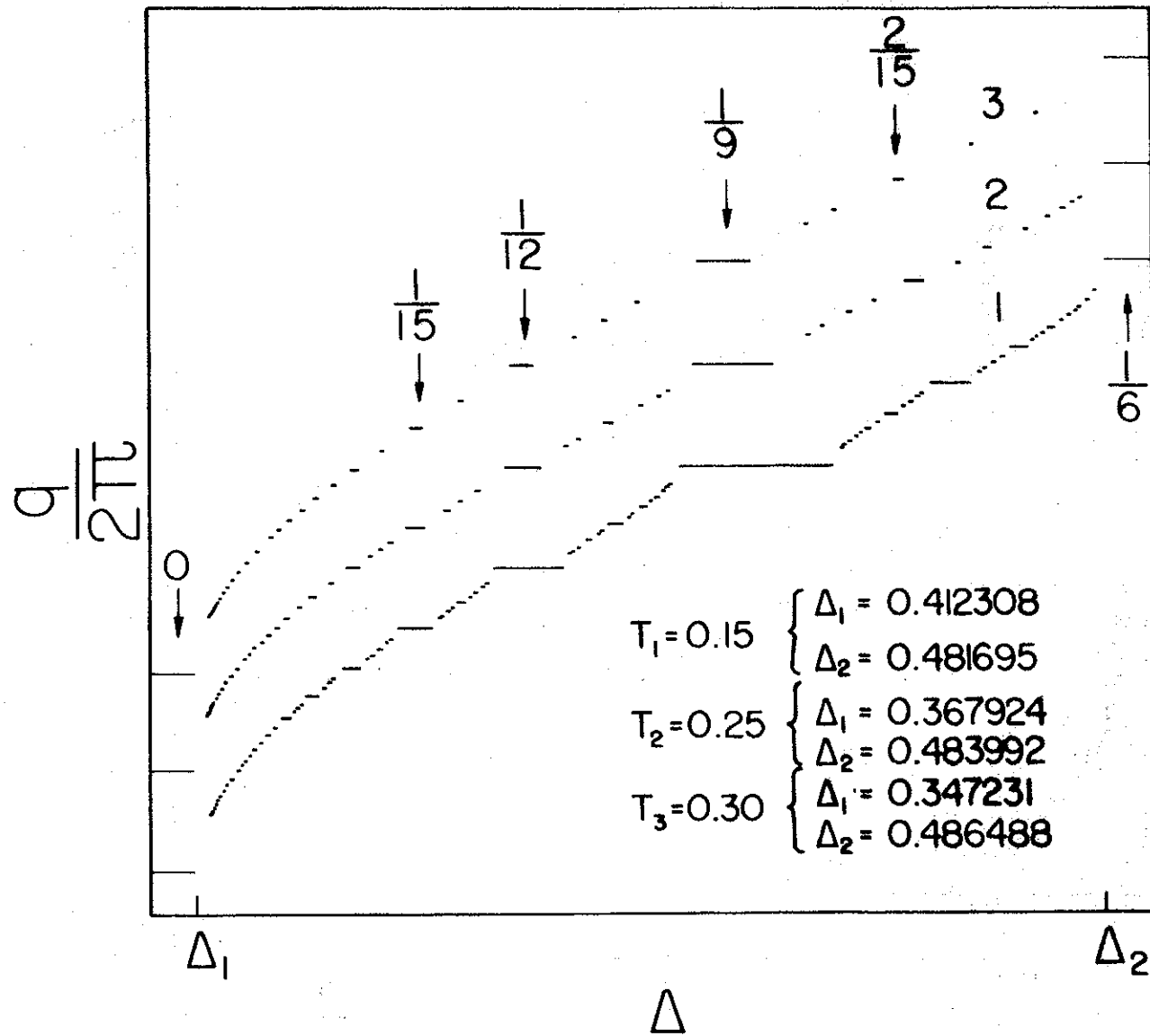


FIG. 5(a)

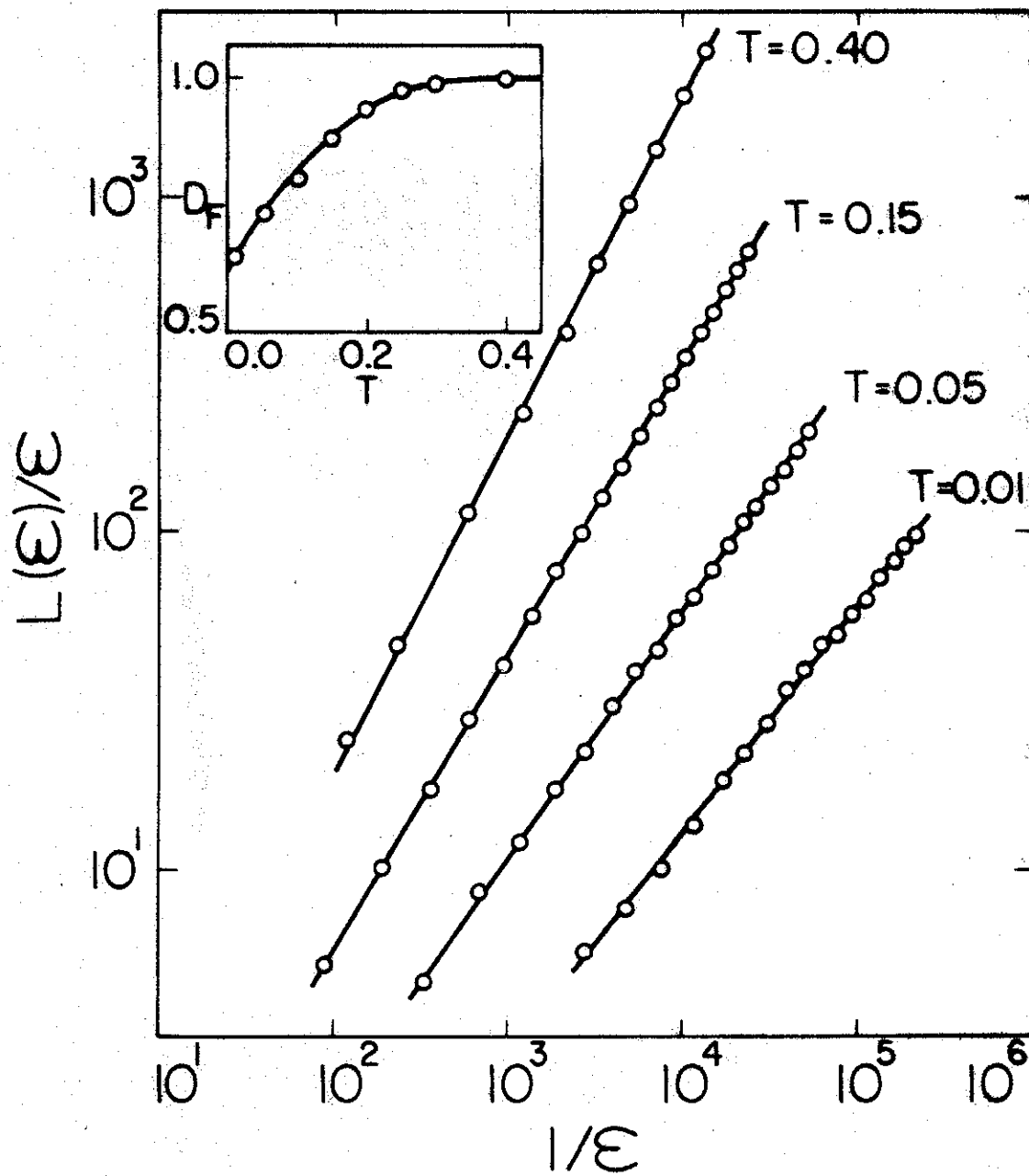


FIG. 5(b)

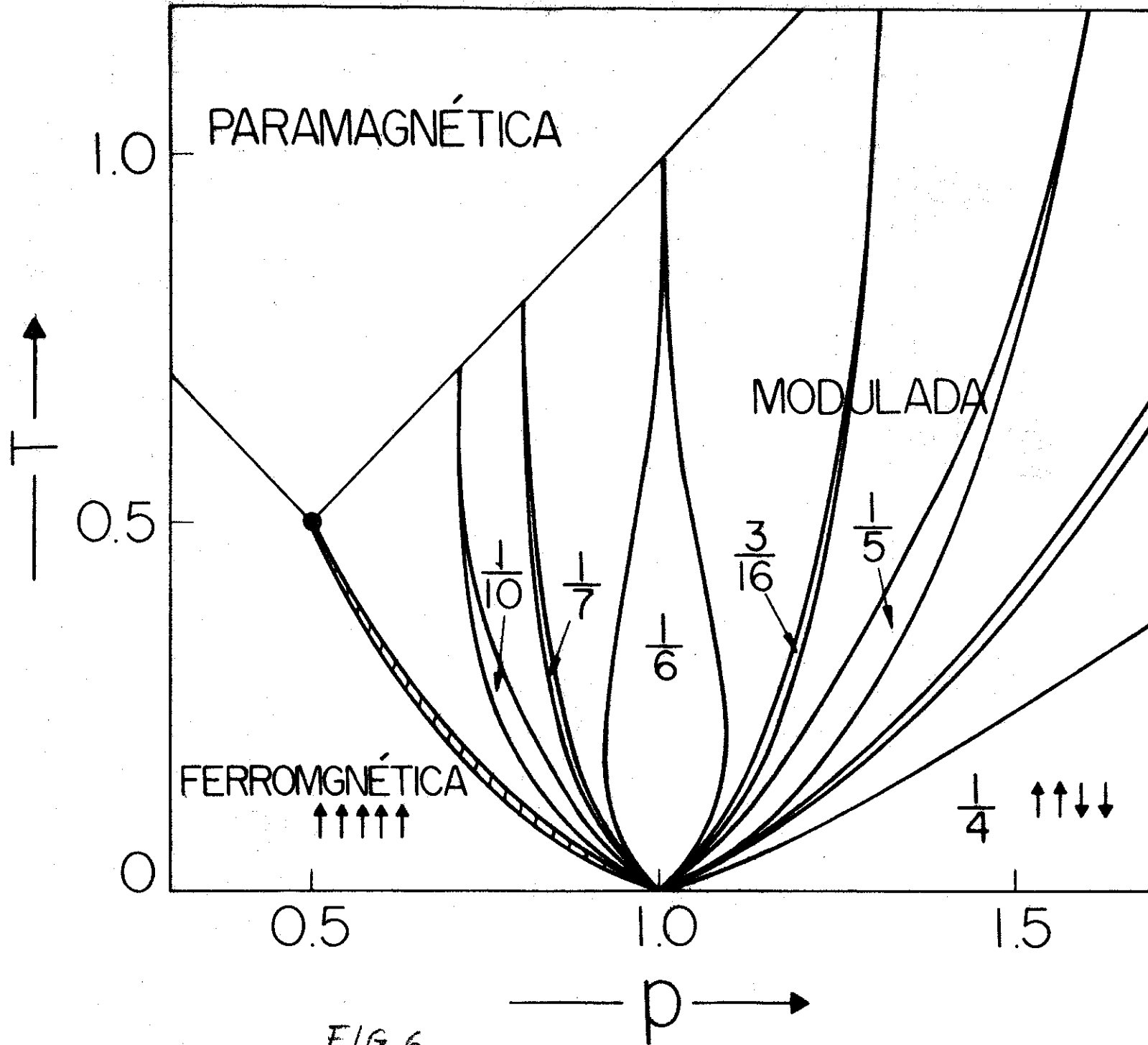


FIG. 6

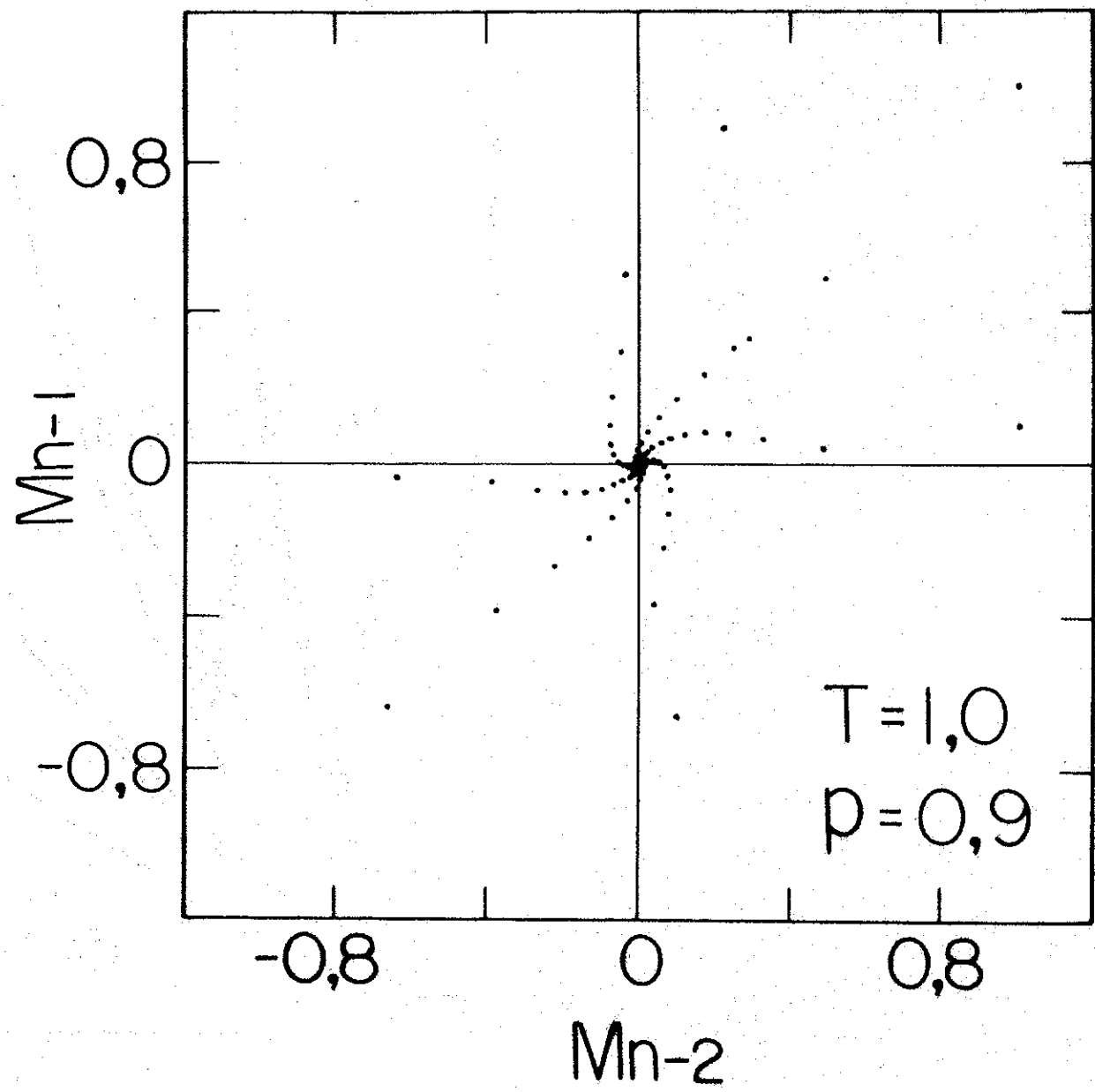


FIG. 7

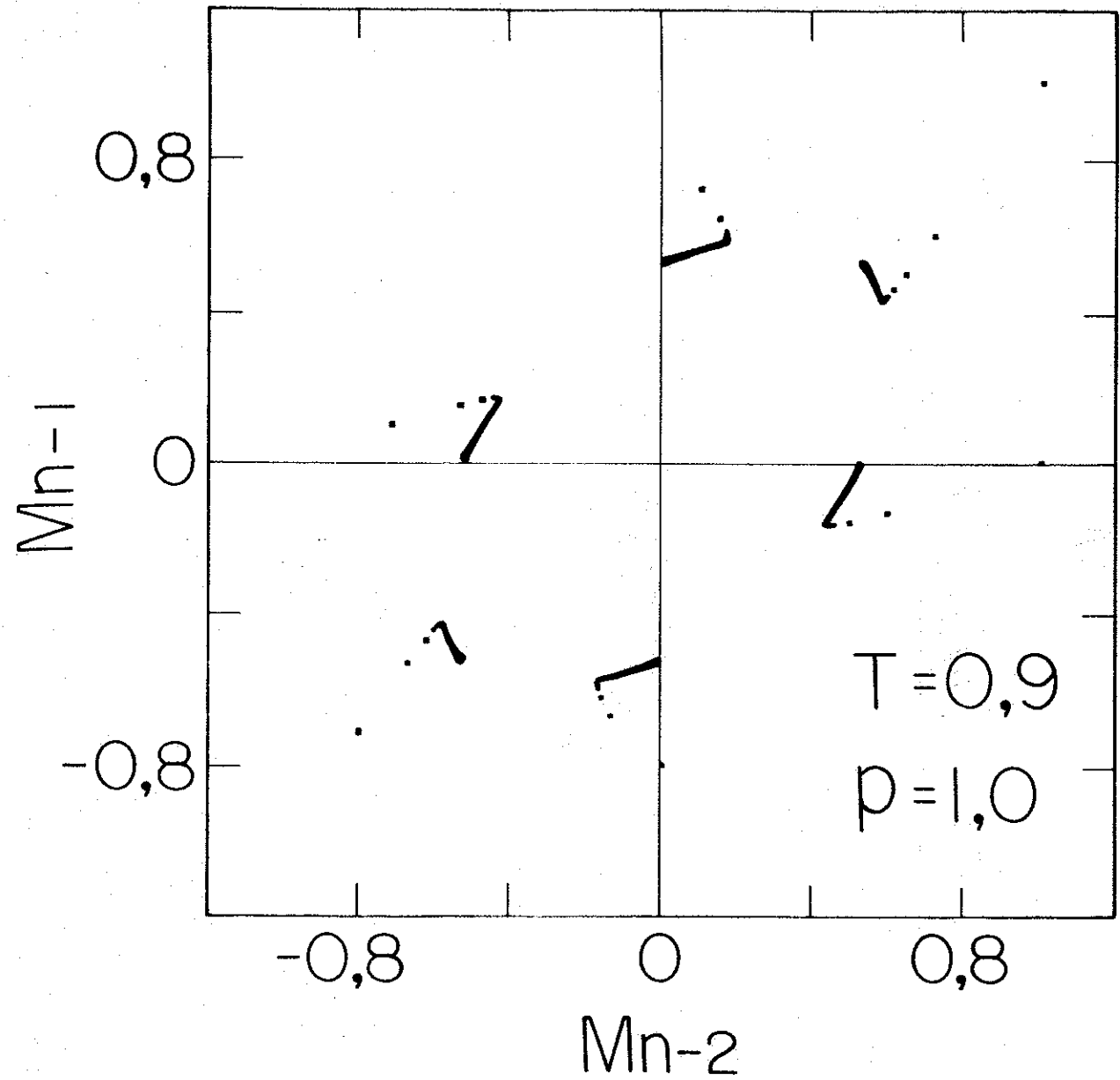


FIG. 8

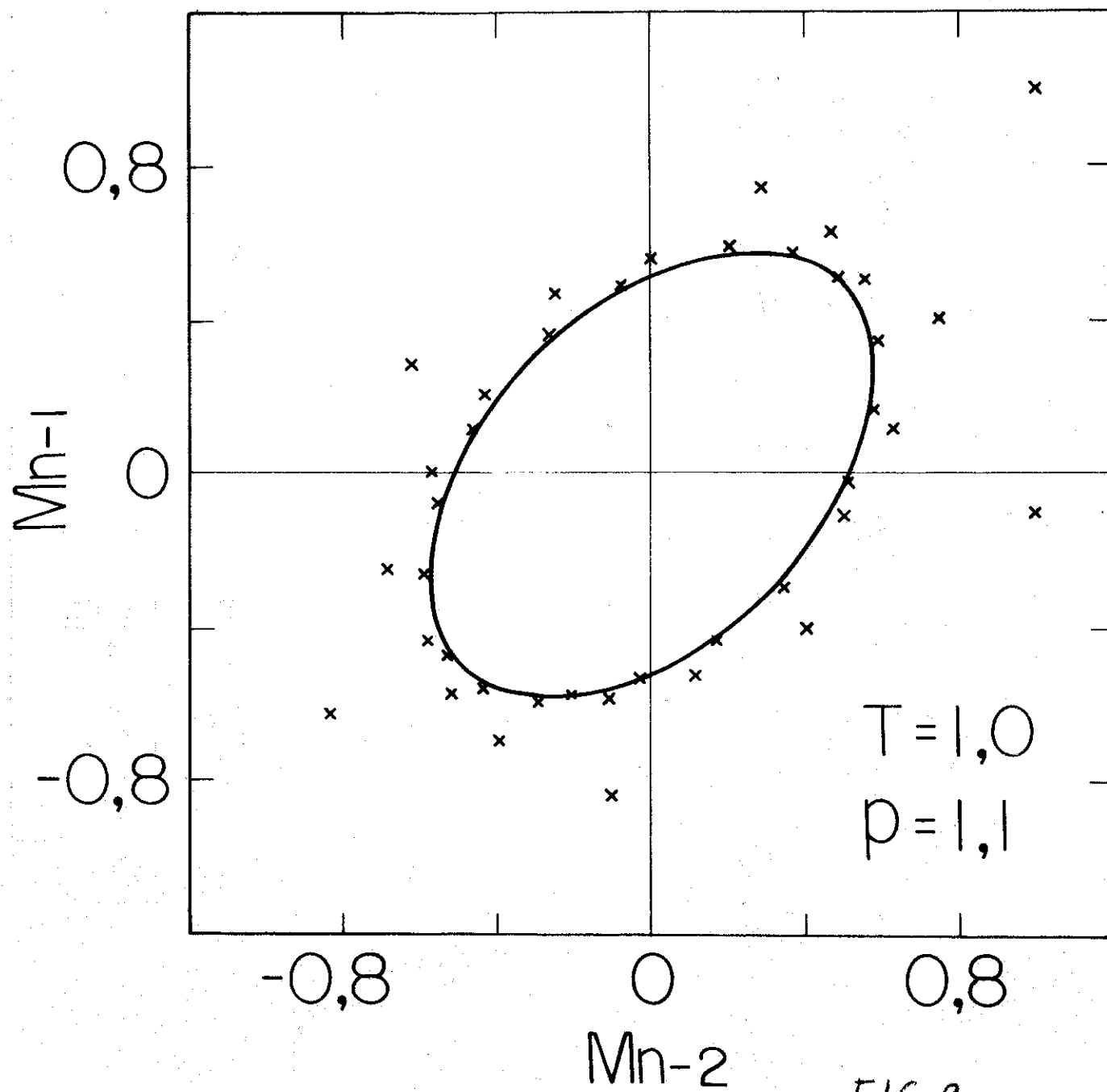


FIG. 9

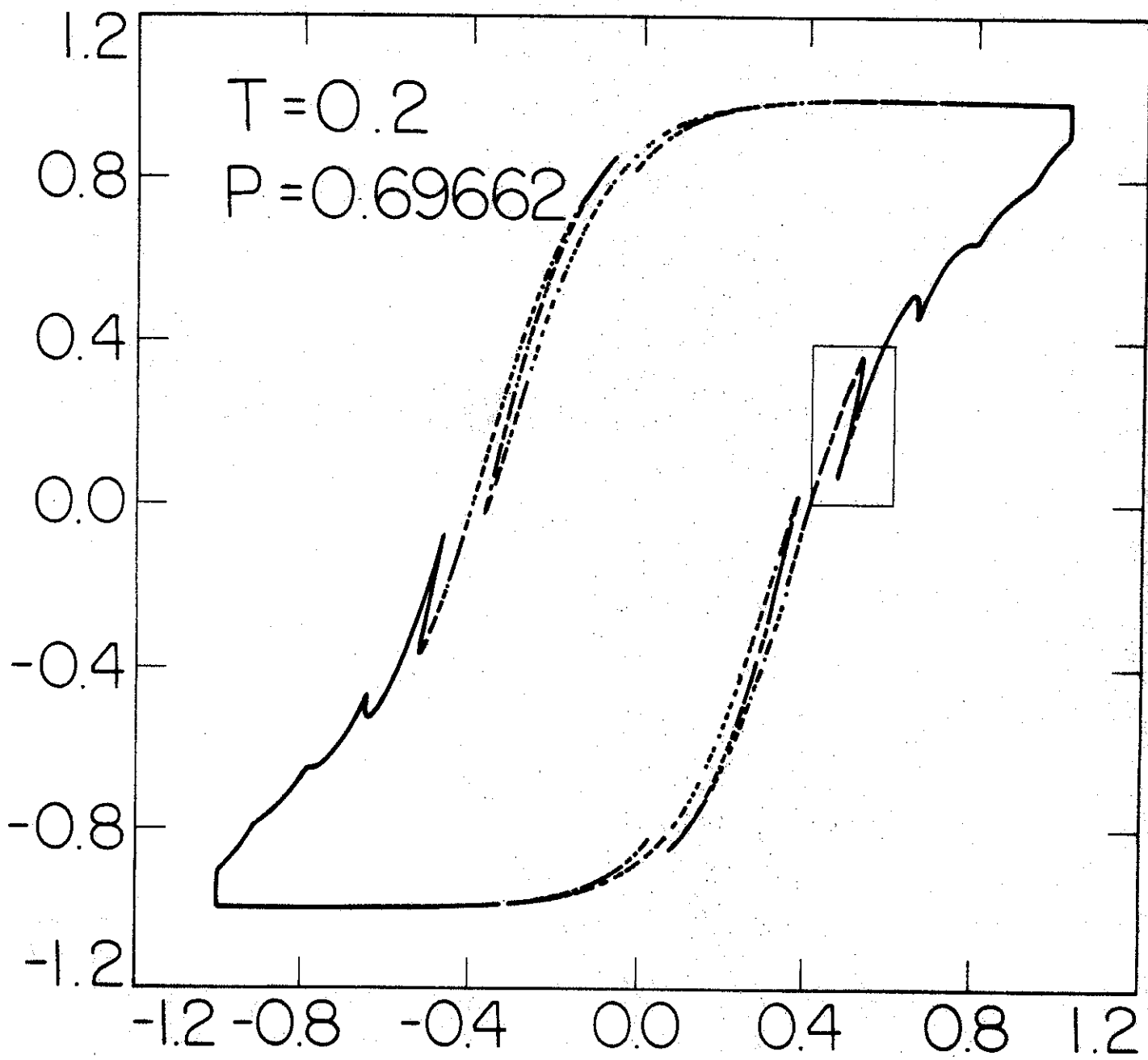


FIG. 10

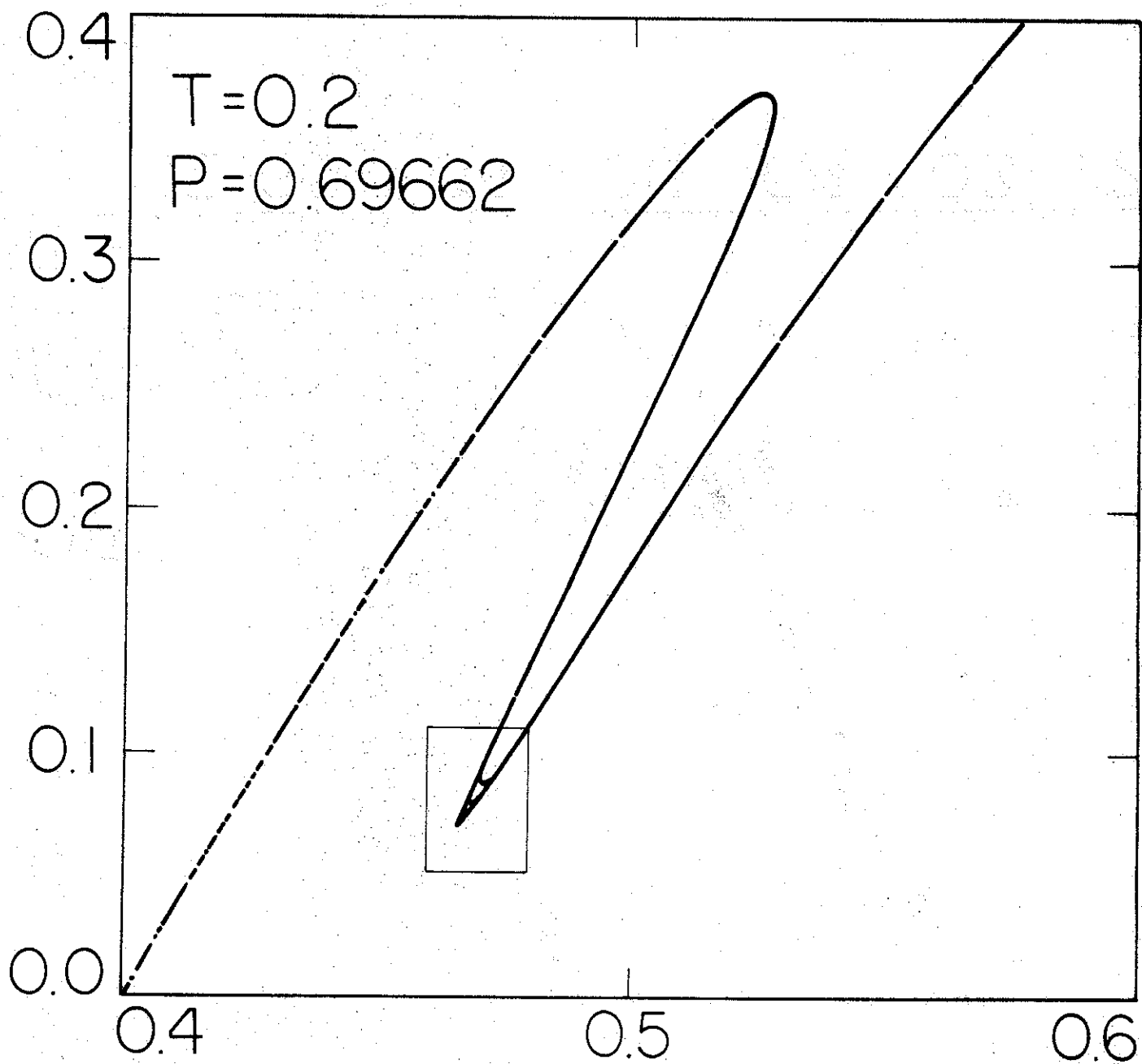


FIG. 11

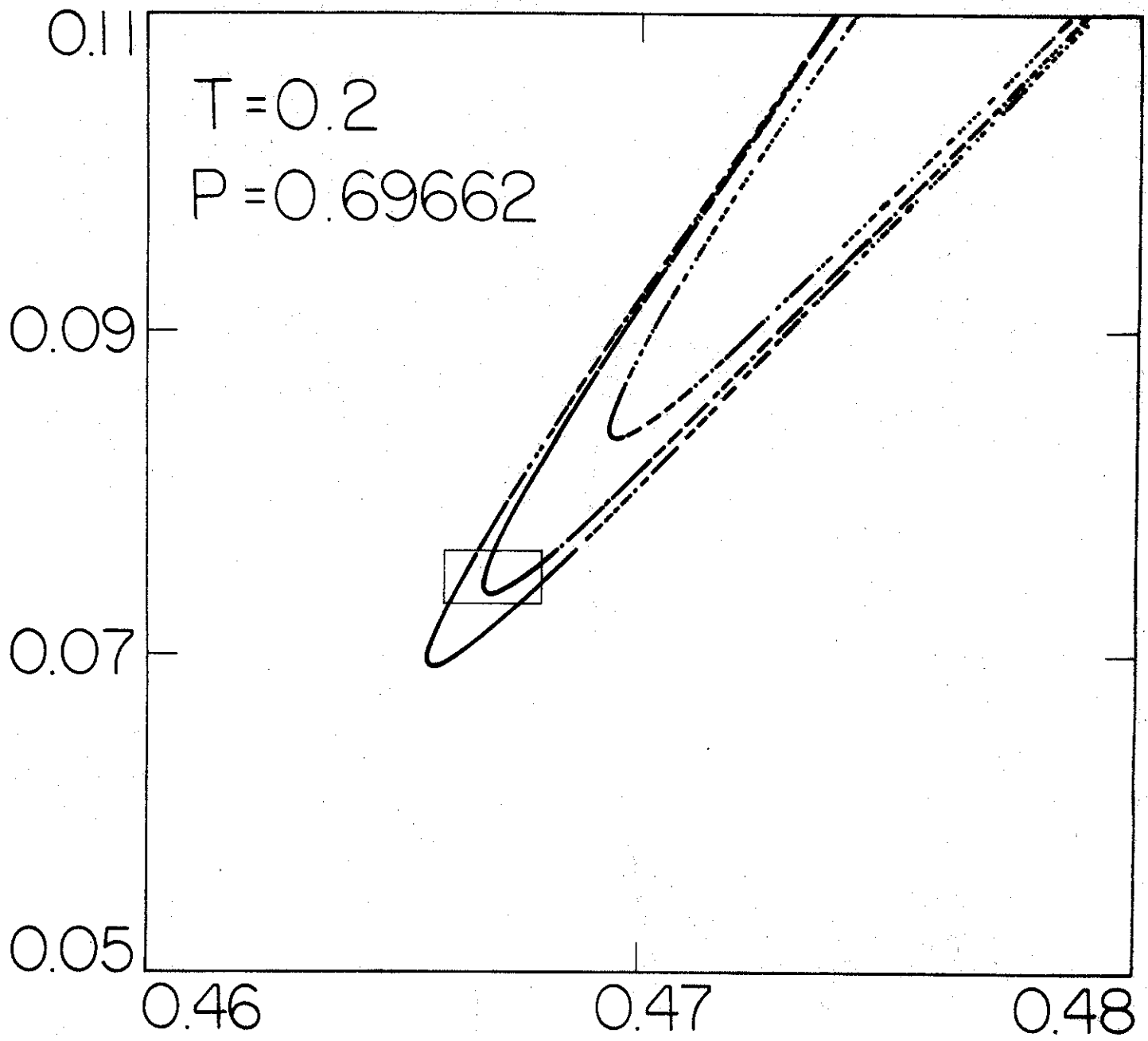


FIG. 12

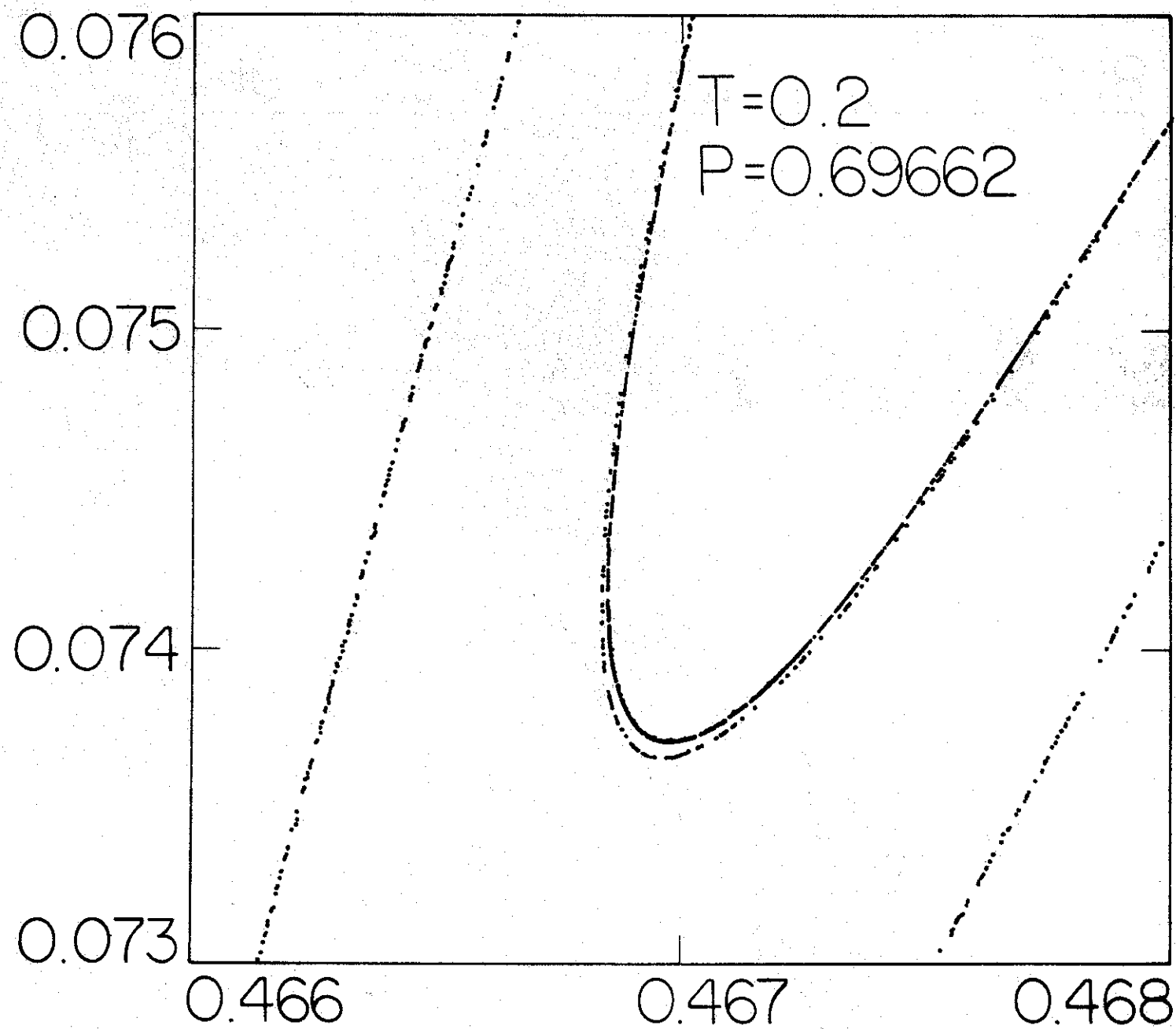


FIG.13

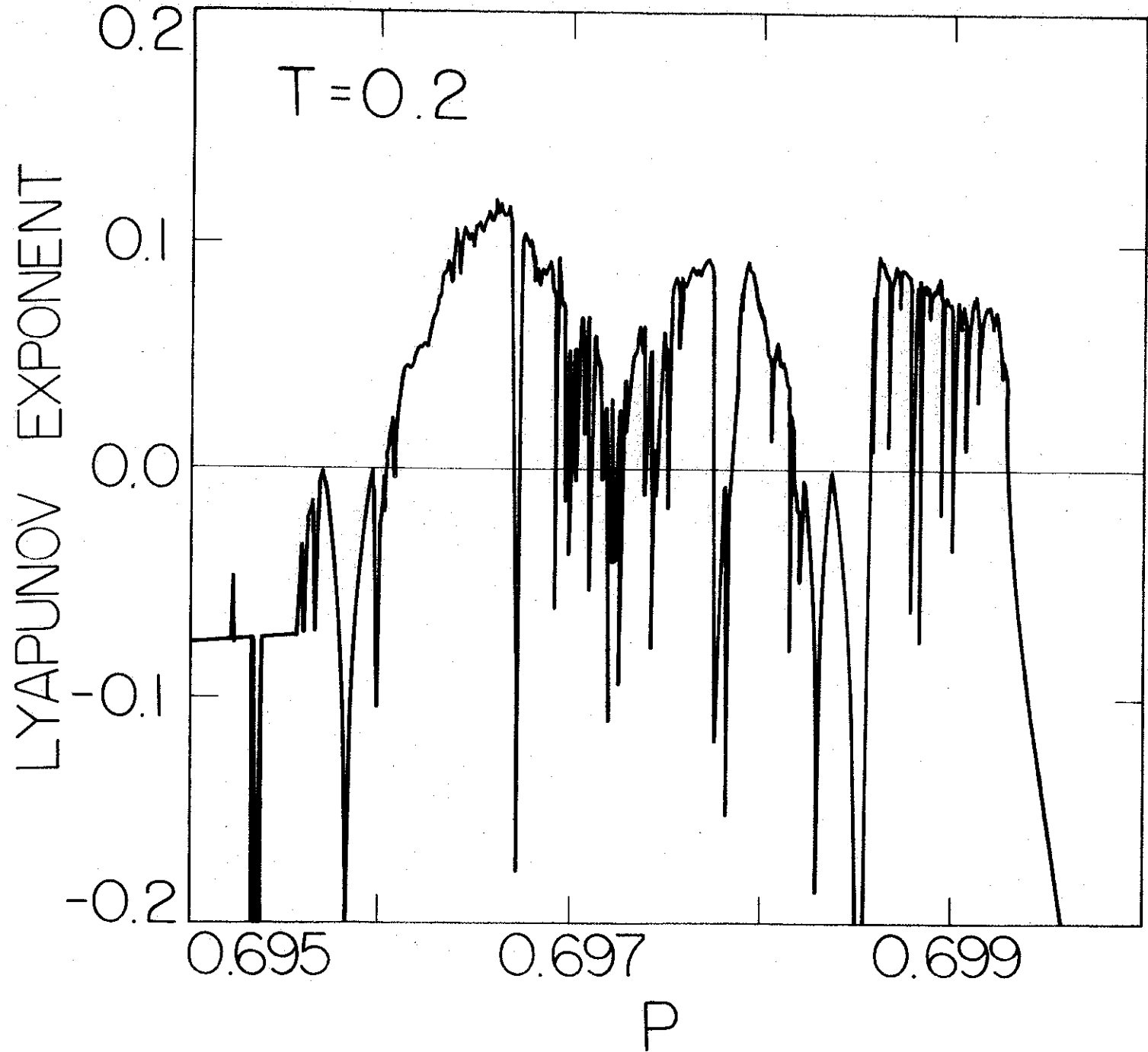


FIG. 14