

IFUSP/P-718
B.I.F. - USP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PUBLICAÇÕES

INSTITUTO DE FÍSICA
CAIXA POSTAL 20516
01498 - SÃO PAULO - SP
BRASIL

IFUSP/P-718

MECÂNICA ESTATÍSTICA DOS SÓLITOS DO HÉLIO
LÍQUIDO. II: O SEGUNDO CAMPO CONDENSADO



L.R. Evangelista e I. Ventura

Instituto de Física, Universidade de São Paulo

25 AGO 1988

Junho/1988

MECÂNICA ESTATÍSTICA DOS SÓLITONS DO HÉLIO LÍQUIDO. II:

O SEGUNDO CAMPO CONDENSADO

L.R. Evangelista* e I. Ventura

Instituto de Física, Universidade de São Paulo

C.P. 20516, 01498 São Paulo, SP, Brasil

RESUMO

Neste segundo artigo continua a apresentação da teoria do superfluido, iniciada no artigo anterior. Aqui fazemos o aperfeiçoamento de descrever a nuvem térmica através de um segundo campo condensado ψ_c , que condensa na função de onda do pacote instantâneo, e forma um envelope coerente que envolve as quasi-partículas da nuvem. O quadrado do módulo de ψ_c é igual à densidade da nuvem térmica. A energia cinética de ponto zero dos estados ligados passa a fazer parte do termo cinético da energia do campo clássico ψ_c , e isso nos obriga a descontar um outro contra-termo da Hamiltoniana das quasi-partículas da nuvem. O resultado é que o gap passa a ser dado apenas pela energia cinética $\frac{1}{2} m(\bar{c}v)^2$, que é devida ao movimento do sóliton. Além do superfluido e do líquido normal, relatamos a existência de duas outras fases teoricamente possíveis.

*Afastado da Universidade Estadual de Maringá (PR) para a pós-graduação na Universidade de São Paulo.

ABSTRACT

The exposition of the superfluid theory initiated in the previous paper, continues here. In this second paper the description of the thermal cloud is perfected through the introduction of the second condensate field ψ_c , that condensates in the instantaneous packet wave function, and provides a coherent envelope to modulate the bound states. The squared amplitude of the second classical field $|\psi_c|^2$, is equal to the thermal cloud density. The bound-state zero-point kinetic energy belongs now to the classical field kinetic term, and this leads us to subtract another counter-term from the thermal cloud Hamiltonian. It then results a new gap, given by the kinetic energy, $\frac{1}{2} m(\bar{c}V)^2$, that is due to the soliton's motion. Besides the superfluid and the normal liquid, we report the theoretical existence of two other phases.

I. INTRODUÇÃO

No artigo anterior, construímos a mecânica estatística do Hélio líquido, através da introdução da nuvem térmica, que é um aglomerado de quasi-partículas ligadas aos sólitons do sistema¹.

O propósito deste segundo artigo sobre o assunto é apresentar um aperfeiçoamento daquele método. Aqui, a nuvem térmica será descrita por um campo clássico ψ_c , que vai envolver os estados ligados de cada sóliton, como um envelope.

Este novo método conduz a uma melhor fundamentação teórica do problema, embora não introduza nenhuma grande modificação nos cálculos do trabalho anterior.

ψ_c é tal que seu módulo quadrado deve se igualar à densidade da nuvem térmica, por uma questão de auto-consistência.

Ao igualarmos o potencial químico à energia do pacote instantâneo $f_0(\vec{x}, t)$, condensa um segundo campo clássico macroscópico, ψ_c , proporcional a essa função de onda. E o novo campo vai interagir de forma não linear com o campo do condensado φ_c , e consigo mesmo.

Então a interação não linear compensa a tendência a dispersão do pacote instantâneo, e isso estabiliza ψ_c , mesmo sendo ambos proporcionais.

Na seção II discute-se a formação da fase de sólitons, e a condensação do novo campo clássico ψ_c , que envolve os estados ligados.

O estudo da dinâmica não linear dos dois campos clássicos, φ_c e ψ_c , é feito no capítulo III.

O capítulo IV é, por sua vez, dedicado à análise da

modificação da energia das quasi-partículas ligadas, devida à introdução do termo cinético de ψ_c na energia clássica.

As fases do sistema são apresentadas na seção V. A pequena mudança na energia das quasi-partículas, produz uma pequena alteração (de 6%) na temperatura crítica, que agora passa a ser $1,96^\circ\text{K}$. Além das fases superfluida e líquida, o sistema passa a ter mais duas fases: a fase C, de baixa temperatura, e cheia de sólitons quasi-estáticos; e uma outra fase de alta temperatura, a fase D, cheia de sólitons fundos e vazios. As linhas de mínimo das novas fases são mostradas na fig. (1).

II. SOBRE A CONDENSAÇÃO DO NOVO CAMPO

Uma maneira intuitiva de explicar a formação e o equilíbrio da fase de sólitons é a seguinte:

(1) Primeiro suponhamos que insistíssemos em formar uma configuração $(\underline{a}_i, \gamma)$, onde \underline{a}_i fosse muito menor que o número de sólitons do equilíbrio. Vejamos o que acontece:

Nesse sistema diluído, os estados de menor energia, entre aqueles correlacionados com cada nuvem térmica, num dado instante, seriam os pacotes instantâneos do tipo:

$$f_0(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{\frac{\gamma m \bar{c}}{2}} \frac{1}{\cosh \gamma m \bar{c}(x - \bar{c}vt)} \quad (1)$$

(ver Eq. (80) do artigo anterior) cuja energia é

$$E_2\{f_0\} = \lambda \rho_c - \frac{1}{2} m \bar{c}^2 \gamma^2 \quad (2)$$

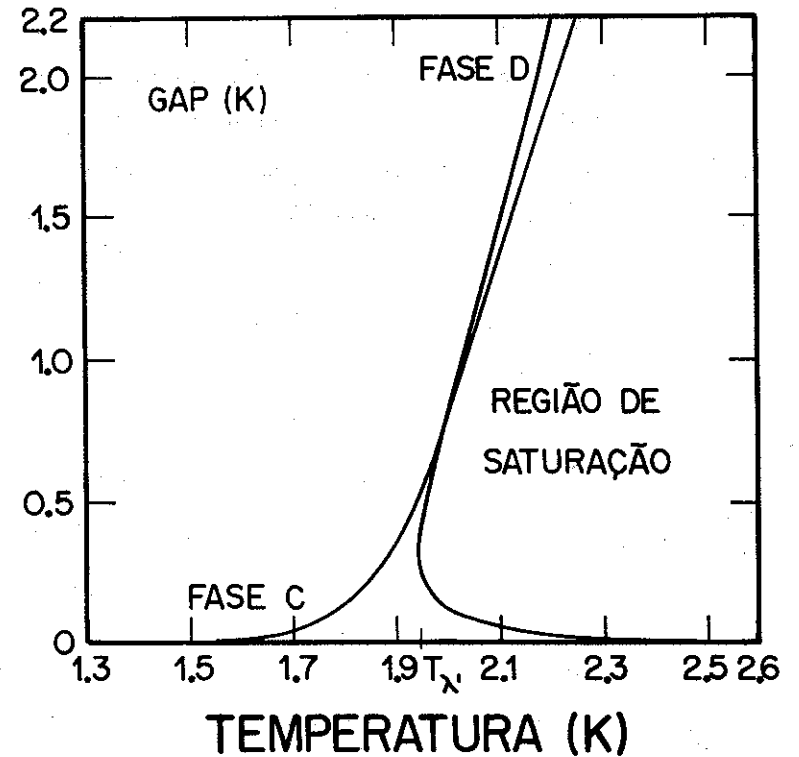


FIG.1- TRAJETÓRIAS DO GAP (C, D) E REGIÃO DE SATURAÇÃO.

Na realidade, o fato de o sistema ter vários sólitons faria surgir uma banda de estados instantâneos, formados por combinações lineares dos estados do tipo f_0 dos vários sólitons. Mas, sendo o número de sólitons muito pequeno, a fórmula (2) já é uma excelente aproximação para o piso da banda.

(2) Numa tal configuração, o nível do campo médio, que atua sobre as quasi-partículas do fluido normal,

$$\tilde{V}_1(\underline{a}_i) = \lambda \rho_c - \frac{2 \gamma \underline{a}_i}{m\bar{c}} \lambda \rho_c, \quad (3)$$

fica muito acima do piso da banda, porque \underline{a}_i é pequeno.

(3) Além disso, ali, para ocorrer a condensação de um segundo campo clássico, proporcional à função de onda do pacote instantâneo, nós devemos igualar o potencial químico a $E_2\{f_0\}$ (ver itens (5) e (6) na seqüência) e, portanto, a dinâmica do fluido normal passa a ter um gap, dado pela diferença entre o campo médio e o potencial químico:

$$\alpha = \tilde{V}_1(\underline{a}_i) - \mu \quad (4)$$

ou

$$\alpha = -\frac{2 \gamma \underline{a}_i}{m\bar{c}} \lambda \rho_c + \frac{1}{2} m \bar{c}^2 \gamma^2. \quad (5)$$

O nivelamento, entre o potencial químico e a energia do pacote instantâneo, faz com que o gap, das excitações pertencentes à nuvem térmica, passe a ser dado somente por $\frac{1}{2} m (\bar{c}V)^2$, que é a componente da energia cinética das quasi-partículas, devida ao movimento do sóliton (ver Capítulo IV).

(4) Então, como a energia livre do fluido normal,

$$\text{Vol} \frac{T}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \ln \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{T} \left(\alpha + \frac{p^2}{2m} \right) \right] \right\}, \quad (6)$$

é um termo de volume (e, portanto, mais importante que a dos sólitons, que é proporcional a $\underline{a}_i V$), o sistema vai ter a tendência de produzir mais sólitons para baixar o campo médio, minimizar o gap α , e assim fazê-la mais negativa ainda, minimizando o termo de volume.

Logo, a situação de equilíbrio vai ser alcançada quando o gap α for nulo (ou pelo menos quase nulo - ver discussão no final do artigo), e isto determina o valor do número de sólitons.

Esse argumento intuitivo sozinho forneceria um valor para o "número de sólitons" que a rigor é um pouquinho diferente daquele da Eq. (87) do artigo anterior ($\underline{a}_i = \frac{3}{4} \underline{a}$); mas, contudo, ele tornou evidente o porquê do sistema formar espontaneamente a fase de sólitons, com um valor determinado para \underline{a} .

(5) Observamos, no entanto, que, se o potencial químico se igualou à energia do pacote instantâneo, então vai ocorrer inevitavelmente a condensação de um campo clássico, proporcional à função de onda daquele estado.

Essa condensação é análoga à que ocorre na própria Teoria de London⁽²⁾. Lá, o estado de energia zero (o "threshold" da energia), que tem função de onda constante e uniforme, e que teria número de ocupação infinito, condensa para formar o condensado uniforme daquele sistema.

Então, nesta teoria, além do campo clássico $\phi_c(\vec{x}, t)$, que descreve o condensado cheio de sólitons, nós teremos ainda,

nas vizinhanças de cada sóliton, um outro campo clássico $\psi_c(\vec{x}, t)$, que vai representar a condensação do modo instantâneo $f_0(\vec{x}, t)$. E, é claro que $\psi_c(\vec{x}, t)$ será proporcional à função de onda $f_0(\vec{x}, t)$:

$$\begin{aligned} \psi_c(\vec{x}, t) &= \text{const. } f_0(\vec{x}, t) \\ &= \text{const. } \frac{1}{\cosh \gamma m \tilde{c}(x - \tilde{c}Vt)} \end{aligned} \quad (7)$$

(6) No gás de Bose-Einstein, a densidade do fluido normal a cada temperatura é determinada pela mecânica estatística. No entanto, a liberdade de escolher a densidade total do sistema vai se refletir numa liberdade de escolha da amplitude do campo condensado².

Aqui também, em princípio, nós poderíamos atribuir à amplitude do novo campo condensado o valor que quiséssemos. Mas contudo, ao utilizarmos ψ_c para descrever a nuvem térmica, e para descrever com propriedade sua interação com o campo $\varphi_c(\vec{x}, t)$ devemos fazer com que o quadrado do módulo de ψ_c seja proporcional à densidade da nuvem térmica, e, por conseguinte, proporcional também ao "buraco do sóliton":

$$|\psi_c(\vec{x}, t)|^2 = \rho_{n.t.}(\vec{x}, t) = b \frac{\rho_c \gamma^2}{\cosh^2 \gamma m \tilde{c}(x - \tilde{c}Vt)} \quad (8)$$

onde b é o fator de enchimento.

O que garante a consistência disso tudo é a proporcionalidade existente entre o módulo quadrado do pacote instantâneo $|f_0(\vec{x}, t)|^2$, e a função "buraco do sóliton", da qual decorre a compatibilidade completa, entre as Eqs. (7) e (8).

III. DINÂMICA DOS DOIS CAMPOS CLÁSSICOS

Temos que ter sempre em mente que os campos clássicos φ_c e ψ_c não são independentes.

φ_c é a parte clássica do campo quântico original φ (cujos quanta, nos sistemas de densidade zero, descreveriam os átomos de ^4He), e corresponde ao condensado não uniforme, cheio de sólitons.

ψ_c , por seu turno, é uma flutuação em torno de φ_c , que condensou, porque tinha energia zero, e ficou macroscópica.

Então, muito embora possamos ainda introduzir outras flutuações $[\eta(\vec{x}, t)]$ do campo bosônico φ , em torno do campo clássico φ_c , não existem flutuações do campo ψ_c ; pois ψ_c já é ele mesmo uma flutuação de dinâmica não linear.

Mesmo assim, vale a pena analisar a dinâmica de dois campos clássicos independentes Φ e Ψ , que simula a interação e a interdependência entre φ_c e ψ_c , no sistema sóliton/nuvem térmica.

Tal dinâmica será formulada através de uma Lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi, \Psi) = \int d\vec{x} \left\{ i \Phi^* \partial_t \Phi - \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \Phi^* \vec{\nabla} \Phi + \lambda \rho_c \Phi^* \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^* \Phi)^2 \right. \\ \left. + i \Psi^* \partial_t \Psi - \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \Psi^* \vec{\nabla} \Psi + \lambda \rho_c \Psi^* \Psi - \frac{\lambda}{2} (\Psi^* \Psi)^2 \right. \\ \left. - \lambda \Phi^* \Phi \Psi^* \Psi + i \vec{\nabla} \Psi^* \vec{\nabla} \Psi \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

que leva às seguintes equações de Euler-Lagrange:

$$i \partial_t \phi = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \phi - \lambda \rho_c \phi + \lambda \phi^* \phi^2 + \lambda \psi^* \psi \phi \quad (10)$$

$$i \partial_t \psi = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi - i v \frac{\partial}{\partial x} \psi - \lambda \rho_c \psi + \lambda \psi^* \psi^2 + \lambda \phi^* \phi \psi \quad (11)$$

onde já supusemos que a velocidade \vec{v} é na direção \vec{x} .

Se fizermos então

$$v = \bar{c} v, \quad (12)$$

podemos verificar que os campos

$$\varphi_c = \sqrt{\rho_c} \left\{ v - i \gamma \operatorname{tgh} \gamma m \bar{c} (x - \bar{c} v t) \right\} \quad (13)$$

$$\psi_c = \sqrt{b \rho_c} \frac{\gamma}{\cosh \gamma m \bar{c} (x - \bar{c} v t)} e^{-i \Omega t} \quad (14)$$

com \bar{c} e Ω dados por

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{\lambda \rho_c}{m}} \sqrt{1-b} = \bar{c} \sqrt{\lambda} \quad (15)$$

$$\Omega = -\frac{1}{2} m (\bar{c} \gamma)^2 \quad (16)$$

resolvem o sistema de equações (10)-(11), se substituídos respectivamente em lugar de ϕ e ψ .

Ora, o campo $\varphi_c(\vec{x}, t)$ descreve justamente o sóliton renormalizado por uma nuvem térmica; enquanto que $\psi_c(\vec{x}, t)$ satisfaz simultaneamente às condições (7) e (8).

Então as Eqs. (10) e (11) reproduzem de fato a interdependência entre o sóliton e a nuvem térmica; e mostram que pode-se ter a mesma auto-consistência que tínhamos antes, mas só que agora, introduzindo a nuvem térmica por meio de um campo clássico $\psi_c(\vec{x}, t)$, ao invés de uma densidade clássica $\rho_{n.t.}(\vec{x}, t)$.

Podemos então calcular a energia do sistema de campos φ_c, ψ_c ,

$$\begin{aligned} \bar{E}_c(\varphi_c, \psi_c) = & \int d^3 \vec{x} \left\{ + \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \varphi_c^* \vec{\nabla} \varphi_c - \lambda \rho_c \varphi_c^* \varphi_c + \frac{\lambda}{2} (\varphi_c^* \varphi_c)^2 \right. \\ & + \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \psi_c^* \vec{\nabla} \psi_c - \lambda \rho_c \psi_c^* \psi_c + \frac{\lambda}{2} (\psi_c^* \psi_c)^2 \\ & \left. + \lambda \varphi_c^* \varphi_c \psi_c^* \psi_c - i \bar{c} v \psi_c^* \partial_x \psi_c \right\} \quad (17) \end{aligned}$$

onde o último termo é nulo, em vista da forma de ψ_c dada pela Eq. (14).

Essa expressão, da energia clássica do sistema sóliton/nuvem térmica, difere da energia clássica do artigo anterior, apenas pela energia cinética do campo clássico ψ_c (vide Eqs. (45) e (99) do artigo anterior):

$$\frac{1}{2m} \int d^3 \vec{x} \vec{\nabla} \psi_c^* \vec{\nabla} \psi_c = \frac{1}{3} \bar{c} \rho_c \sqrt{\lambda} \gamma^3; \quad (18)$$

a qual vai modificar a tensão superficial clássica do sóliton/nuvem térmica da seguinte maneira:

$$\bar{\sigma}(\gamma, \lambda) = \bar{c} \rho_c \sqrt{\lambda} \gamma^3. \quad (19)$$

O pacote instantâneo normalizado que aparece, a cada

instante, na dinâmica das flutuações infinitesimais da nuvem, dispersa com o passar do tempo de maneira complicada. No entanto o campo clássico ψ_c , mesmo sendo a cada instante proporcional ao pacote instantâneo, é estável, e mantém a sua forma. Isso decorre da auto-interação de ψ_c , e principalmente de sua interação não linear com φ_c . Em muitos casos³ a estabilidade de um sóliton pode ser interpretada como uma consequência do equilíbrio entre duas tendências opostas: a tendência a dispersão, e a tendência a aglutinação, provocada esta última pela não linearidade³.

IV. QUASI-PARTÍCULAS DA NUVEM TÉRMICA

O fator $\psi_0(x - \bar{c}Vt)$, que aparece multiplicando as funções de onda das quasi-partículas ligadas no laboratório (ver Eq. (74) do artigo anterior),

$$\psi_{\vec{k}}^{\text{Lab}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{A}} \exp i \left[\vec{k} \cdot \vec{z} + m\bar{c}Vx \right] \psi_0(x - \bar{c}Vt) \quad , \quad (20)$$

é proporcional ao campo clássico $\psi_c(\vec{x}, t)$. É por isso que $\psi_c(\vec{x}, t)$, além de ser o pacote instantâneo que condensou, é também um envelope que modula todas as funções de onda ligadas.

Para deduzir neste caso a equação de movimento das quasi-partículas da nuvem, temos outra vez que substituir o campo $\varphi = \varphi_c + \eta$ em lugar de φ_c na energia clássica $\bar{E}(\varphi_c, \psi_c)$ da Eq. (17), mantendo até termos quadráticos em η . Assim procedendo, verificamos que, com uma única diferença, o resultado é análogo ao do artigo anterior.

Essa diferença é justamente um contra-termo extra que

temos de descontar porque a energia cinética de ponto zero das quasi-partículas da nuvem ($\frac{1}{6} m(\bar{c}\gamma)^2$ por quasi-partícula) já está incorporada no termo cinético do campo clássico ψ_c , dado pela Eq. (18).

Logo, além dos dois contra-termos que já descontamos da média térmica de $H_0\{\eta\}$ (ver Eqs. (58) e (62) do artigo anterior), temos agora que subtrair mais um

$$\left\langle \frac{1}{6} m(\bar{c}\gamma)^2 \eta^* \eta \right\rangle_{\text{térmica}} \quad ; \quad (21)$$

e isto vai alterar a Hamiltoniana que descreve as quasi-partículas ligadas (ver Eq. (65) do artigo anterior):

$$\begin{aligned} \bar{H}_1\{\eta\} = & \int d^3\vec{x} \left\{ \frac{1}{2m} \nabla \eta^* \nabla \eta + \lambda(\varphi_c^* \varphi_c + \psi_c^* \psi_c) \eta^* \eta \right. \\ & \left. - \frac{1}{6} m(\bar{c}\gamma)^2 \eta^* \eta \right\} \quad . \quad (22) \end{aligned}$$

A energia do pacote instantâneo $f_0(\vec{x}, 0)$ então também se modifica:

$$\begin{aligned} \bar{E}_2\{f_0\} &= \lambda \rho_c - \frac{1}{2} m(\bar{c}\gamma)^2 - \frac{1}{6} m(\bar{c}\gamma)^2 \\ &= \lambda \rho_c - \frac{2}{3} m(\bar{c}\gamma)^2 \quad , \quad (23) \end{aligned}$$

e essa é a menor energia média possível, na dinâmica de $\bar{H}_1\{\eta\}$.

Portanto, e porque $f_0(\vec{x}, 0)$ é justamente o estado em que vai condensar o novo campo clássico ψ_c , o potencial quí-mico agora terá que ser igual a $\bar{E}_2\{f_0\}$.

Além disso, como discutimos no Capítulo II, para mi-

nimizar o termo de volume da energia livre do fluido normal, o campo médio da Eq. (3) terá de baixar até o valor do potencial químico, ou seja, até o valor $\bar{E}_2\{f_0\}$. E esse nivelamento fixa o valor do "número de sólitons" do sistema

$$\underline{a} = \frac{1}{3} m \bar{c} \gamma X^{3/2} \quad (24)$$

que, por sinal, é igual àquele \underline{a} calculado no artigo anterior (ver Eq. (87) daquele artigo). A pequena discrepância no valor de \underline{a} , que surgia na análise simplificada do Capítulo II era por que, ali, ainda não havíamos subtraído o contra-termo cinético (21).

Ao contrário do que acontecia no artigo anterior, o pacote instantâneo $f_0(\vec{x}, t)$, descrito pela dinâmica da nuvem térmica, agora tem a mesma energia do piso do fluido normal. Acontece que, quando uma quasi-partícula do fluido normal de repente se acopla à nuvem térmica, ela provoca uma modificação infinitesimal no campo clássico ψ_c , que por sua vez acarreta um gasto extra de energia, devido ao termo cinético de ψ_c , que é justamente $\frac{1}{6} m(\bar{c}\gamma)^2$. Ou seja, o mesmo valor da diferença entre a energia $f_0(\vec{x}, t)$ e o piso do sistema, no outro caso.

É claro também que o contra-termo cinético produz uma mudança no valor do gap das quasi-partículas constituintes da nuvem térmica:

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{2} m \bar{c}^2 v^2 = \frac{1}{2} m \bar{c}^2 (1-\gamma^2) \quad , \quad (25)$$

que passa a ser dado apenas pela parte da energia cinética da excitação, que é devida ao movimento do sóliton.

Essa fórmula do gap agora "sabe" que γ não pode ser maior que um, pois nesse caso o gap seria negativo. Então, quando minimizarmos a energia livre, aqui, não ocorre nunca de o valor de γ no ponto de equilíbrio ser maior que um.

Como consequência direta dessa alteração do gap, aquela equação do segundo grau, do índice de profundidade, também vai mudar um pouco; e suas novas raízes serão:

$$\bar{X}(\tilde{\Delta}, T)_{\mp} = \frac{1}{2S^2} \left[1 \mp \sqrt{1 - 8 \frac{\tilde{\Delta}}{mc^2} S^2(\tilde{\Delta}, T)} \right] \quad (26)$$

Portanto, repetindo o procedimento relatado no artigo anterior, nós podemos calcular a energia livre total do sistema de sólitons; para, a partir da localização das linhas de mínimo $\tilde{\Delta}_i(T)$, determinar as fases do sistema.

Uma maneira formal de obter o termo cinético do campo ψ_c , que existe na energia clássica, é a seguinte: consideremos o campo não local formado pelos modos ligados da Eq. (20)

$$\eta = \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}^{\text{Lab}}(\vec{x}, t) \quad (27)$$

A média térmica do termo cinético (correspondente aos momentos da direção x) desse campo é dada por

$$\frac{1}{2m} \langle \int d^3x \partial_x \eta^* \partial_x \eta \rangle_{\text{térmica}} = \frac{1}{2m} \int d^3\vec{x} \sum_{\vec{k}} n(\vec{k}) \frac{\partial}{\partial x} \psi_{\vec{k}}^{\text{Lab}*} \frac{\partial}{\partial x} \psi_{\vec{k}}^{\text{Lab}} \quad (28)$$

onde $n(\vec{k})$ é o número de ocupação do estado ligado de momento transversal \vec{k} , e corresponde à média térmica $\langle a_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}} \rangle_{\text{térmica}}$.

Podemos então desenvolver a derivada da função de onda $\psi_{\vec{k}}$ obtendo (ver Eq. (20)):

$$\partial_x \psi_{\vec{k}}^{\text{Lab}} = im\bar{c}v \psi_{\vec{k}}^{\text{Lab}} + \frac{1}{\sqrt{A}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{z} + m\bar{c}v x)} \frac{\partial}{\partial x} \psi_0 \quad (29)$$

onde ψ_0 é aquela função definida no artigo anterior, que corresponde a um envelope para todos os estados ligados. De forma que na média térmica da Eq. (28) surgirão termos da forma

$$\int d^3 \vec{x} \left\{ \frac{1}{2m} \left[\sum_{\vec{k}} n(\vec{k}) \right] \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_0^*}{\partial x} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{1}{2m} (-im\bar{c}v) \left[\sum_{\vec{k}} n(\vec{k}) \right] \frac{1}{A} (\psi_0^* \partial_x \psi_0 - \psi_0 \partial_x \psi_0^*) \right\} + \dots \quad (30)$$

Portanto, se definirmos

$$\left[\frac{1}{A} \sum_{\vec{k}} n(\vec{k}) \right]^{1/2} \psi_0 = \psi_c(\vec{x}, t) \quad (31)$$

(definição esta, que é completamente consistente com a condição de proporcionalidade das Eqs. (7) e (8), e com os cálculos referentes às Eqs. (104) e (105) do artigo anterior), nós então vemos que aqueles dois termos acima,

$$\int d^3 \vec{x} \left\{ \frac{1}{2m} \partial_x \psi_c^* \partial_x \psi_c - i\bar{c}v \psi_c^* \partial_x \psi_c \right\} \quad (32)$$

são justamente o termo cinético de ψ_c , e o último termo da energia clássica da Eq. (17). Há mais um termo nesse desenvolvimento, que não foi explicitado na Eq. (30), o qual vai fazer parte da média térmica da hamiltoniana das excitações da nuvem térmica.

Nesse sentido é que podemos dizer que, ao condensar, o campo clássico ψ_c vai descrever o movimento coletivo e coerente do envelope dos estados ligados $\psi_{\vec{k}}^{\text{Lab}}(\vec{x}, t)$.

Portanto o movimento desse envelope, que se refere à direção x , é totalmente coerente. No entanto o movimento transversal dos estados ligados não é coerente, pois o momento transversal varia de excitação para excitação.

Na análise aqui esboçada, vemos que, partindo da energia interna do sistema do sóliton com estados ligados que têm o mesmo envelope, será possível separar uma energia clássica de ψ_c e ψ_c , que corresponde inclusive à mesma densidade de energia da fórmula (17) da energia interna das quasi-partículas. Esse talvez seja o caminho mais natural, para formular a dinâmica do sistema.

V. AS FASES

O SUPERFLUIDO E O LÍQUIDO NORMAL: este sistema também terá fases A e B muitíssimo semelhantes àquelas do caso anterior. A alteração na fórmula do índice de profundidade, Eq. (26), produz um pequeno deslocamento na região de saturação, e uma ligeira mudança, da ordem de 6%, na temperatura crítica.

A temperatura em que desaparece o mínimo da fase superfluida, associado à raiz $\bar{\chi}_-(\bar{\Delta}, T)$, agora é 1.962°K. Enquanto que a fase líquida, associada à raiz $\bar{\chi}_+(\bar{\Delta}, T)$, vai se iniciar a uma temperatura aproximadamente 1% menor: $\bar{T}_l = 1.945^\circ\text{K}$.

Consideradas as pequenas diferenças de temperatura, tanto o gap, como o "número de sólitons", o índice de profundidade, assim como também o número γ , aqui obtidos, são bastante se

melhantes àqueles do artigo anterior.

Nas figuras (2) e (3), são mostrados respectivamente o gap Δ e o número γ das fases A e B, como funções da temperatura. Vemos que agora, mesmo na região da fase B, a função $\gamma(T)$, se mantém nitidamente afastada do valor $\gamma = 1$; ao contrário do que ocorria no cálculo do artigo anterior, onde, na alta fase B, esse número chegava a penetrar um pouquinho acima de seu limite.

Aqui também, na transição entre as fases superfluida e líquida, o calor específico tem a forma característica da letra λ , como pode-se ver na fig. (4).

Observação sobre o mecanismo da superfluidez: os resultados apresentados comprovam a proposta feita anteriormente, de que o ^4He líquido em equilíbrio é cheio de sólitons planares em movimento. Logo, essas paredes devem ser, de fato, as responsáveis pelo transporte superfluido que ocorre no Hélio.

Num tubo capilar cheio de Hélio, o transporte de matéria ou calor, na direção do eixo do tubo, feito através dos sólitons, utilizará o equivalente a $\frac{1}{3}$ da área total dos mesmos no processo. Na condição mais favorável (e ideal portanto) de transporte, todos esses sólitons estarão se movendo no mesmo sentido. Então, uma estimativa, sobre a capacidade do líquido em realizar transporte superfluido, pode ser dada pela corrente de matéria desse caso ideal, a que denominamos índice de superfluidez, s . s é o produto da velocidade de cada sóliton pelo "número de sólitons", e ainda vezes a massa faltante em cada sóliton:

$$\begin{aligned} s &= \bar{c} V \frac{a}{3} \frac{2 \rho_c \gamma \sqrt{\chi}}{m \bar{c}} \\ &= \frac{2}{3} c \rho_c \frac{a}{m \bar{c}} V \gamma \chi \end{aligned} \quad (33)$$

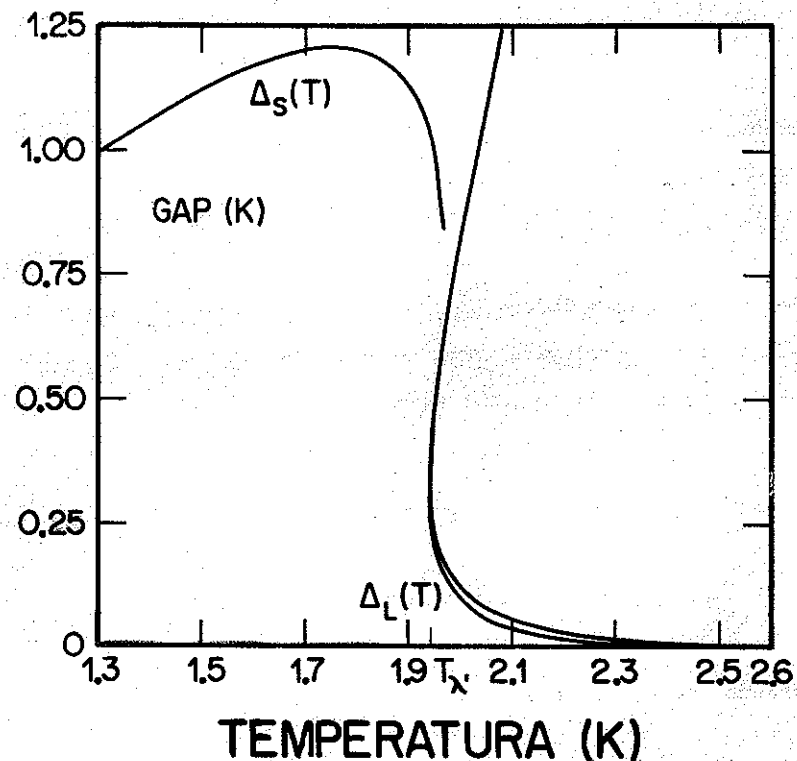


FIG. 2 - TRAJETÓRIAS DO GAP - FASE A: $\Delta_S(T)$; FASE B: $\Delta_L(T)$ E REGIÃO DE SATURAÇÃO.

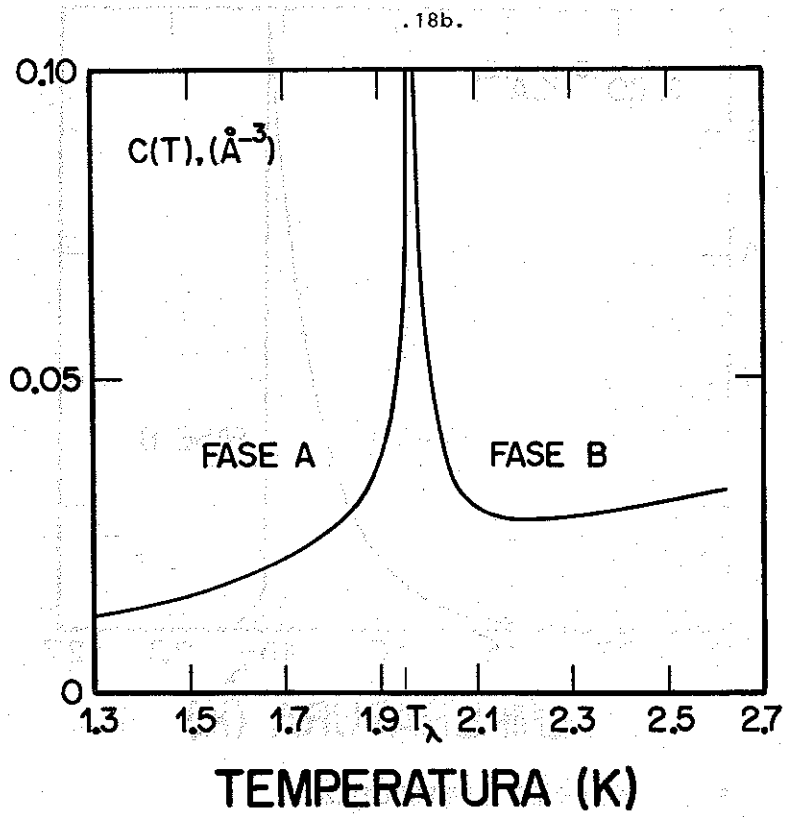


FIG. 4 - CALOR ESPECÍFICO TOTAL DAS FASES SUPERFLUIDA E LÍQUIDA.

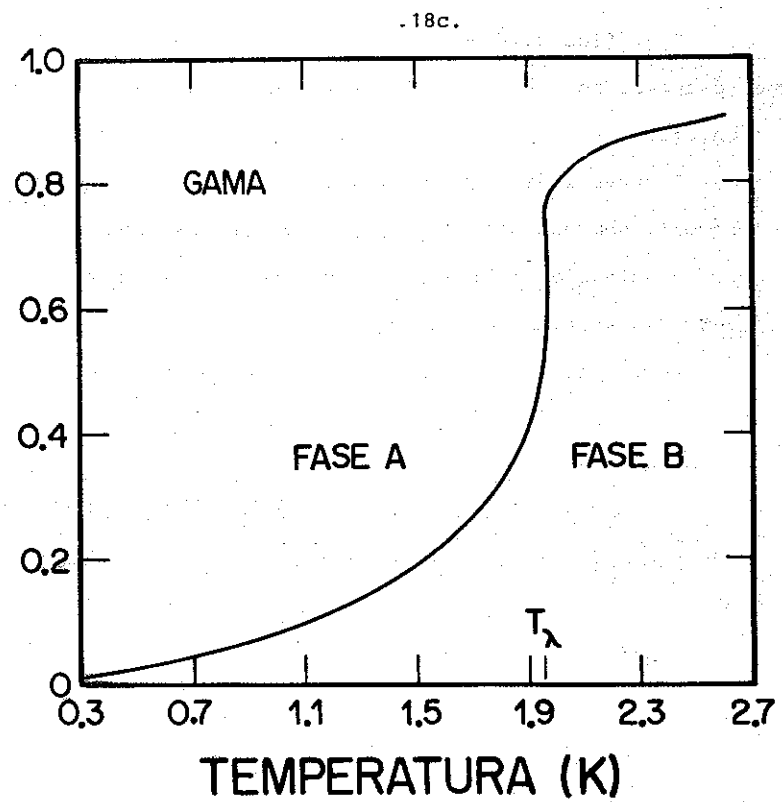


FIG. 3 - NÚMERO γ DAS FASES SUPERFLUIDA E LÍQUIDA.

O gráfico da função $s(T)$ está na fig. (5). Vemos ali que, é apenas no intervalo $1.4^{\circ}\text{K} \lesssim T < T_{\lambda}$, que a superfluidez é significativa.

A curva indica que o efeito não deve ocorrer, nem no líquido normal, nem nas baixas temperaturas; e essa conclusão está em concordância qualitativa com os dados experimentais de transporte, tanto de matéria, como de calor^{4,5}.

Mesmo que a corrente no tubo seja menor do que $s(T)$, o movimento superfluido se dará, quando houver um excesso de sólitons se movendo num sentido, relativamente aos que se movem n'outro. E, na medida em que, sólitons de velocidades opostas introduzem defasagens também opostas no condensado, configurações desse tipo produzirão uma diferença de fase nas extremidades do tubo; em consistência com o mecanismo da superfluidez proposto por Anderson⁶.

Também é provável que seja o movimento desses sólitons (cuja velocidade, no intervalo $1.0 - 1.9^{\circ}\text{K}$, é da ordem de 60 m/seg) o responsável pela existência de corrente persistente⁷ no Hélio.

FASE C: há ainda duas outras linhas de mínimo, $\tilde{\Delta}_C(T)$ e $\tilde{\Delta}_\alpha(T)$, associadas à raiz $\tilde{\chi}_+(\tilde{\Delta}, T)$ e $\tilde{\chi}_-(\tilde{\Delta}, T)$ respectivamente.

A primeira delas, $\tilde{\Delta}_C(T)$, que define a fase C, se inicia no zero absoluto, permanece próxima à linha $\tilde{\Delta} = 0$, até aproximadamente 1.6°K , quando aí ela sobe rápido, para terminar na fronteira da região de saturação em $T = 1.980^{\circ}\text{K}$, um pouco acima do ponto λ (ver fig. (1)).

É uma fase de sólitons lentos, quasi-estáticos, como mostra o gráfico da velocidade \tilde{c}_V , na fig. (6).

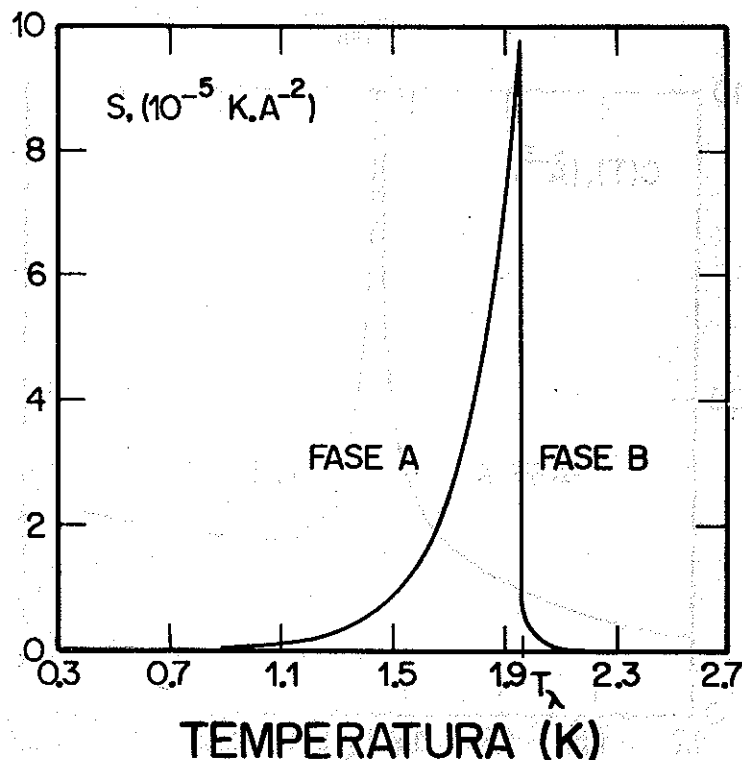


FIG. 5 - ÍNDICE DE SUPERFLUIDEZ.
(VER EXPLICAÇÃO NO TEXTO).

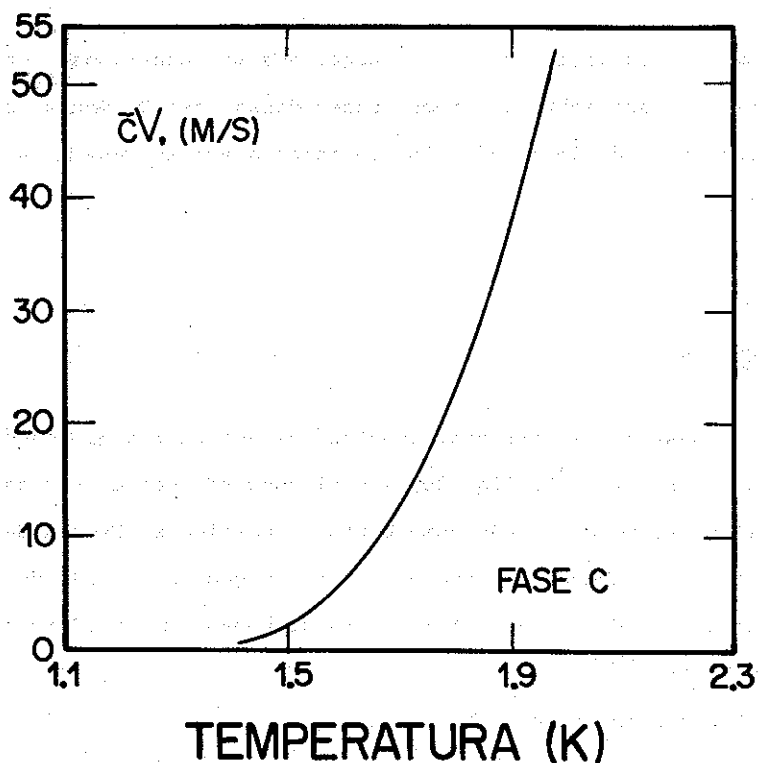


FIG. 6 - VELOCIDADE DOS SÓLITONS DA FASE C.

Seu calor específico é mostrado, por sua vez, na fig. (7). Nas imediações de T_λ , ele passa por um máximo, e, em seguida cai rapidamente, até o desaparecimento da fase.

Nas baixas temperaturas, e nas proximidades da pressão de liquefação, o Hélio sólido, mesmo sendo cristalino, exhibe efeitos não lineares significativos⁸. Trata-se de um cristal quântico, onde o movimento de ponto zero é muito intenso. Estima-se, por exemplo, que os átomos podem excursionar pelo sólido com tal amplitude, que a troca de posição, entre vizinhos mais próximos, ocorre à frequência de 10^8 /seg.⁸.

Em vista desses fatos, parece razoável supor, que a teoria de campos não linear que tratamos aqui (muito embora não esteja equipada convenientemente para descrever um cristal, pois aproximamos o núcleo da força de van der Waals por um potencial delta), poderia talvez não ser de todo inadequada para tratar o sólido.

Portanto, é possível que a fase C, que é cheia de sólitons quasi-estáticos, mesmo não sendo ela própria cristalina, já seja, contudo, uma indicação da existência do Hélio sólido. Inclusive porque, ela se estende, aproximadamente pelo mesmo intervalo de temperatura, em que também, nas vizinhanças da pressão de liquefação, existe a fase sólida.

FASE D: na fronteira da região de saturação, um pouco acima do ponto em que desaparece a fase C, inicia-se a linha de mínimo de uma quarta fase (ver fig. (1)), cujo "número de sólitons" é muito grande.

No entanto, ali, o índice de profundidade rapidamente atinge valores muito elevados (a $2,3^\circ\text{K}$ ele já é 0.6) incompatível

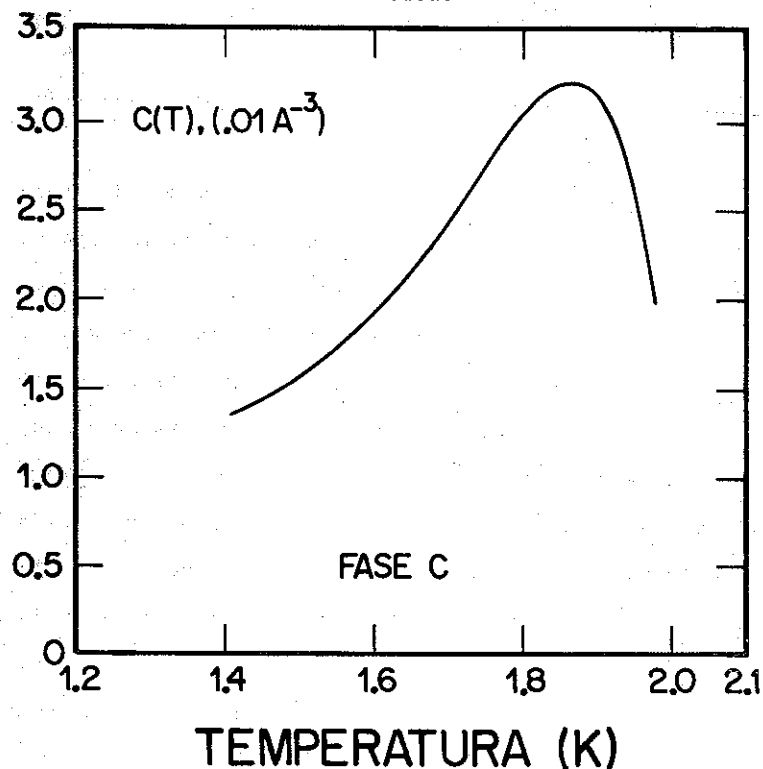


FIG. 7- CALOR ESPECÍFICO TOTAL DA FASE C.

tíveis com a aproximação $b=1$. Logo, nós só poderemos ter uma definição clara sobre as propriedades dessa fase D, depois de aperfeiçoarmos o método de cálculo, de forma a evitar aquela aproximação.

VI. CONCLUSÕES

Nestes dois artigos, construímos uma teoria microscópica para descrever o ^4He líquido, a qual concorda com muitos aspectos da experiência. Tendo como ponto de partida a Teoria de Bogoliubov, e adaptando o método e a interpretação de Fritz London a respeito do gás de Bose-Einstein, para sistemas não uniformes e com interação, conseguiu-se desenvolver de maneira ampla as propostas apresentadas na Ref. (9).

Segundo a teoria, o fenômeno central para se compreender o Hélio é a formação espontânea de sólitons planares no sistema⁹. Cada sóliton é acompanhado por sua nuvem térmica, que é um gás de excitações térmicas do tipo estado ligado. Ocorre também a condensação de um segundo campo clássico, que vai se materializar como um envelope coerente para conter as quasi-partículas ligadas.

Numa segunda etapa, pretendemos utilizar o método aqui apresentado, para calcular outros efeitos, como segundo som, etc..

A experiência mostra que a propagação do 1º som no Hélio é muito complexa¹⁰ (há efeitos de atenuação e dispersão muito complicados¹⁰). Isso a nosso ver sugere que o fônon de comprimento de onda grande não é um modo normal desse sistema; e a-

creditamos ser justamente a existência de domínios de fase a responsável por esse fato.

Ainda assim podemos definir a velocidade do som, como se faz na mecânica dos fluidos, através da variação da pressão com a densidade, a entropia constante¹¹,

$$c = \sqrt{\frac{1}{m} \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s} \quad (34)$$

No zero absoluto a pressão do nosso sistema é $\frac{\lambda \rho^2}{2}$, e portanto a fórmula acima produzirá a mesma relação entre a velocidade do som e a constante de acoplamento λ , $c = \sqrt{\frac{\lambda \rho}{m}}$, que utilizamos para a determinação de λ .

Se $\psi_n(\vec{x})$ for o campo que descreve o nêutron, então, no estudo teórico do espalhamento dessa partícula pelo Hélio líquido, a criação de uma quasi-partícula seria descrita principalmente pelo termo de interação $\varphi_c \eta \psi_n^* \psi_n$. Em princípio, poderíamos então utilizar essa interação para calcular seções de choque de produção, definidas no plano energia/momento das quasi-partículas.

Na Ref. (12) (onde se adota a simplificação de supor que as quasi-partículas são puntiformes), verificou-se que as funções de estrutura associadas a condensados cheios de sólitons são semelhantes às funções de estrutura medidas através do espalhamento de nêutrons. Ali observou-se também a formação do pico do róton, e a do pico do fônon. O pico do róton é um efeito gerado pela variação com \vec{x} da velocidade local do condensado, e da sua densidade.

Neste trabalho analisamos dois tipos de gap: o gap

das quasi-partículas $\frac{1}{2} m(\bar{c}v)^2$, e o gap térmico efetivo do calor específico, $\Delta_0 \sim 6-9^\circ\text{K}$. O limiar da energia das quasi-partículas da nuvem térmica fica um tanto acima (dado pela componente da energia cinética devida ao movimento do sólito) da energia do pacote de onda instantâneo, onde condensa o segundo campo clássico. Logo, na dinâmica da nuvem, o pacote instantâneo faz o papel daquele estado fundamental isolado proposto por Fröhlich.

Portanto, o róton tem muitas faces. Ele se manifesta diferentemente na dinâmica das quasi-partículas, no espalhamento de nêutrons, e no calor específico.

Nesta teoria, ocorre que simultaneamente existe a condensação Bose-Einstein, e existe um gap.

Na discussão do capítulo II, concluímos que aquele gap α , da energia livre do fluido normal, deveria ir a zero, pois essa energia livre é um termo de volume, e, portanto, bem mais importante que a energia livre dos sólitons. No entanto, em princípio, num cálculo mais aperfeiçoado, em que minimizássemos simultaneamente as duas energias livres (a do fluido normal juntamente com a dos sólitons), poderia ocorrer de sobrar um pequeno gap α residual. Isso talvez seja possível porque um pequeno α positivo provocaria, a cada temperatura, um pequeno aumento na densidade do condensado, e um conseqüente aumento no valor do fator $\bar{c}^2 \rho_c$ que multiplica a energia livre dos sólitons (ver Eq. (101) do artigo anterior), tornando-a um pouquinho mais negativa. Esse efeito, se viesse a ocorrer, permitiria que o condensado continuasse a existir até a temperaturas acima da temperatura standard² de condensação Bose-Einstein.

A aproximação de ignorar os termos com oscilação de fase foi feita nas duas dinâmicas do problema (na do campo médio

e na da nuvem térmica). Em princípio, tal aproximação também pode ser melhorada. Mas, é claro que as eventuais correções dos níveis de energia daí resultantes serão no mesmo sentido, para ambas as dinâmicas. Logo, como o "número de sólitons" a depende apenas de diferenças entre valores da energia numa e noutra dinâmica, ele provavelmente seria pouco afetado por essas correções. Deve-se observar também, que a existência da transição de fase no sistema, e o próprio valor da temperatura crítica, independem de a ; dependendo apenas do fenômeno de saturação que ocorre em cada sóliton.

A condensação Bose-Einstein é um exemplo do fenômeno de quebra espontânea de simetria¹³⁻¹⁶, que pode ocorrer nas teorias de campos; tanto naquelas tratadas no zero absoluto^{13,16}, dependendo dos valores das constantes de acoplamento; assim como também nas teorias construídas já a temperatura finita¹⁴⁻¹⁶, dependendo do valor da temperatura. Acreditamos que nosso método do sóliton/nuvem térmica possa ser utilizado em muitos outros desses sistemas, onde se tenha observado quebra espontânea de simetria.

Na Ref. (17), apresenta-se um método de quantização semi-clássica de estados de grandes cargas, em teorias de bosons não relativísticos. O método ali discutido permitia que, depois de quantizada a carga Q do sistema, se definisse um campo clássico $\sqrt{Q} \psi_0(\vec{x})$, sendo $\psi_0(\vec{x})$ uma função de onda normalizada, cuja equação dinâmica era não linear e dependia do valor da própria carga. Aquela análise não era feita a temperatura finita, mas mesmo assim, a relação entre o estado $\psi_0(\vec{x})$ e o campo clássico $\sqrt{Q} \psi_0(\vec{x})$, daquele trabalho, é semelhante à relação existente aqui entre o pacote instantâneo $f_0(\vec{x})$ e o segundo campo

condensado $\psi_c(\vec{x})$.

O segundo campo clássico condensa porque nivelamos o potencial químico com a energia do pacote de onda instantâneo $f_0(\vec{x})$. Se esse estado não tivesse energia zero não ocorreria a condensação de ψ_c . Por outro lado, sendo a Lagrangiana dos dois campos clássicos formalmente invariante por transformações de gauge globais, $\psi_c \rightarrow e^{i\phi} \psi_c$, resulta que a quantidade de matéria pertencente à nuvem térmica será conservada, e isso é uma garantia da estabilidade da nuvem. Mas, no entanto, como não existem propriamente flutuações do campo ψ_c , transformações de gauge infinitesimais, $\psi_c \rightarrow (1+i\delta)\psi_c$, teriam que ser introduzidas através do modo do pacote de onda instantâneo, que é uma flutuação em torno de ψ_c . Logo, essa simetria de gauge formal, a conservação da carga total da nuvem, e sua estabilidade, também, somente são garantidas porque o pacote instantâneo tem energia zero; caso contrário ocorreria um gasto de energia para realizar a transformação de gauge formal, e se perderia a simetria, e a estabilidade da nuvem.

AGRADECIMENTOS

L.R. Evangelista agradece aos colegas M. Simões, M. Aguiar e M. Gubitoso por instruções sobre a utilização de computadores e à CAPES e à Universidade Estadual de Maringá pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- (1) L.R. Evangelista e I. Ventura, artigo anterior.
- (2) F. London, *Superfluids*, vol. II, John Wiley, Nova York (1954).
- (3) A.C. Scott, F.Y.F. Chu e D.W. McLaughlin, *Proc. IEEE* 61, 1443 (1973).
- (4) W.H. Keeson, *Helium*, Elsevier, Amsterdam (1942).
- (5) K.R. Atkins, *Liquid Helium*, At the University Press, Cambridge (1959); J. Wilks, *An Introduction to Liquid Helium*, Clarendon Press, Oxford (1970); E.M. Lifshitz e E.L. Andronikashvili, *A Supplement to Helium*, Consultants Bureau, Nova York (1959).
- (6) P.W. Anderson, *Rev. Mod. Phys.* 38, 298 (1966).
- (7) H.E. Hall, *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)* A250, 359 (1957); W.F. Winen, *Proc. Roy. Soc. (London)* A260, 218 (1961); P.J. Bendt, *Phys. Rev.* 127, 1441 (1962); J.D. Reppy e D. Depatie, *Phys. Rev. Lett.* 12, 20, 187 (1964); J.B. Mehl e W. Zimmermann, Jr., *Phys. Rev. Lett.* 14, 20, 815 (1965); J.S. Langer e J. D. Reppy, *Progress in Low Temperature Physics*, VI, ed. C.F. Gorter, North-Holland, Amsterdam (1955); veja também I. Rudnick, *Proc. Int. School of Physics "Enrico Fermi"*, LXIII, p. 112-164 (1976).
- (8) C.M. Varma e N.R. Werthamer, *Solid Helium*, em *The Physics of Liquid and Solid Helium*, Part I, ed. K.H. Bennemann e J.B. Ketterson, John Wiley, Nova York (1976).
- (9) I. Ventura, *Rev. Bras. Fís.* 9, 375 (1979).
- (10) H.J. Maris, *Rev. Mod. Phys.* 49, 341 (1977).
- (11) Ver, por exemplo, L. Landau e E. Lifshitz, "*Mecanique des Fluides*", Editions Mir, Moscou (1971), p. 307.

- (12) I. Ventura e S. Vitiello, "Sólitons as Liquid ^4He Domain Walls: Quasi-particle spectrum", Univ. S. Paulo preprint (1986), submetido à *Rev. Bras. Fís.*
- (13) J. Goldstone, *Nuovo Cimento* 19, 15 (1961); Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* 122, 345 (1961); 124, 246 (1961); J. Goldstone, A. Salam e S. Weinberg, *Phys. Rev.* 127, 965 (1962); E.S. Abers e B.W. Lee, *Phys. Letters* C9, 1 (1973).
- (14) A.E. Glassgold, A.N. Kaufman e K.M. Watson, *Phys. Rev.* 120, 660 (1960).
- (15) H.E. Haber e H.A. Weldon, *Phys. Rev.* D25, 502 (1982).
- (16) S. Weinberg, *Phys. Rev.* D9, 3357 (1974); A.D. Linde, *Rep. Prog. Phys.* 42, 389 (1979); C. Itzykson e J.B. Zuber, "*Quantum Field Theory*", McGraw-Hill, Nova York (1980); T.D. Lee, "*Particle Physics and Introduction to Field Theory*", Harwood Academic Publishers (1981).
- (17) I. Ventura, "*Métodos Semi-Clássicos em Teoria de Campos*", Tese de Doutorado, Univ. S. Paulo (1977).